4. Großübung

1 Rückwärtsanalyse

Allgemeine Erläuterungen zur Rückwärtsanalyse können der Folie 2.50 (Dozenten-Folien für die Vorlesung) entnommen werden.
Die Rückwärtsanalyse ermöglicht eine Abschätzung des durch den Algorithmus bedingten Fehlers. Dieser kann im Anschluss mit dem unvermeidbaren Fehler aufgrund gestörter Eingangsdaten (z.B. durch Eingangsrundung) verglichen werden. Sollten beide Fehler in der gleichen Größenordnung sein, handelt es sich um einen stabilen Algorithmus.

1.1 Prinzipielles Rechenschema

- Bedingt durch die Pseudoarithmetik entstehen bei jeder Rechenoperation relative Fehler in der Größe $|\epsilon| \leq eps$. Setze diese Fehler in den Algorithmus ein.
- Forme den Algorithmus so um, dass die Fehler ϵ als Störung $\delta_x = \frac{\|\triangle x\|}{\|x\|}$ der Eingangsdaten interpretiert werden können.
- Schätze den durch die gestörten Eingangsdaten entstehenden Fehler, mit Hilfe der Konditionszahl des Problems ab.

1.2 Beispiel

Gegeben ist die Funktion $f(x) = 2x_1 + x_2$ für $x_1,\, x_2 \in \mathbb{M}$

Fehler durch den Algorithmus

$$\begin{aligned} y_1 &= (2x_1)(1+\epsilon_1) \\ y_2 &= (y_1 + x_2)(1+\epsilon_2) \end{aligned}$$

mit $|\epsilon| \leq eps$.

Zusammenfassen zu $\hat{f}(x)$ ergibt

$$\begin{aligned}
\hat{f}(x) &= (2x_1(1+\epsilon_1)+x_2)(1+\epsilon_2) \\
&= 2x_1(1+\epsilon_1)(1+\epsilon_2)+x_2(1+\epsilon_2) \\
&= 2x_1(\underbrace{1+\epsilon_1+\epsilon_2+\overbrace{\epsilon_1\epsilon_2}^{\approx 0}}_{(1+\delta_{x_2})})+x_2\underbrace{(1+\epsilon_2)}_{(1+\delta_{x_2})}
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
|\delta_{x_2}| &= |\epsilon_2| \leq eps \\
|\delta_{x_1}| &= |\epsilon_1+\epsilon_2| \leq 2\,eps
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Die Eingangsdaten x_1, x_2 werden mit dem relativen Fehler δ_{x_1} bzw. δ_{x_2} gestört.

Bei gegebenem x_1, x_2 ergibt sich die folgende Fehlerabschätzung:

$$\begin{aligned}
F(x)_{Algorithmus} = \left|\frac{f(\hat{x})-f(x)}{f(x)}\right| &\leq \kappa_{rel}(x)\sum_{j=1}^{2}\left|\frac{\hat{x}_j-x_j}{x_j}\right| \\
&\leq \kappa_{rel}(x)\sum_{j=1}^{2}\left|\delta_{x_j}\right| \leq \kappa_{rel}(x)\cdot 3\,eps
\end{aligned}$$

Vergleich: Fehler durch gestörte Eingangsdaten (bei exakter Rechnung)

Wenn angenommen wird, dass die Eingangsdaten höchstens mit Maschinengenauigkeit gestört werden, d.h. $\tilde{x}_j = x_j(1+\epsilon)$ mit $|\epsilon| \leq eps$, dann ergibt sich bei exakter Rechnung der folgende (unvermeidbare) Fehler in den Ausgangsdaten:

$$\begin{aligned}
F(x)_{Daten} = \left|\frac{f(\tilde{x})-f(x)}{f(x)}\right| &\leq \kappa_{rel}(x)\sum_{j=1}^{2}\left|\frac{\tilde{x}_j-x_j}{x_j}\right| \\
&\leq \kappa_{rel}(x)\cdot 2\,eps
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Der untersuchte Algorithmus ist stabil, da der durch den Alogrithmus bedingte Fehler $F(x)_{Algorithmus}$ in der Größenordnung des (unvermeidbaren) Datenfehlers $F(x)_{Daten}$ ist.

2 Abschätzung von Normen

2.1 Aufgabe 2.20 (Aufgabensammlung)

Zunächst zeigen wir ((i) - (iv))

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\,\|x\|_2 \leq n\,\|x\|_\infty$$

Zu (i): Sei $\|x\|_\infty = |x_{\hat{i}}|$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} = \sqrt{\left(\sum_{\substack{i=1\\ i\neq\hat{i}}}^{n} |x_i|^2\right) + x_{\hat{i}^2}} \geq |x_{\hat{i}}| = \|x\|_\infty$$

Zu (ii): (Wir zeigen $\|x\|_2^2 \leq \|x\|_1^2$)

$$\|x\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 + \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n} |x_i||x_j| = \sum_{i,j=1}^{n} |x_i||x_j| = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|\right)^2 = \|x\|_1^2$$

Zu (iii): (Wir zeigen $\|x\|_1^2 \leq n\,\|x\|_2^2$)

Vorab: Wegen $(|x_i| - |x_j|)^2 \geq 0$ gilt (Binom. Formel)

$$|x_i|^2 + |x_j|^2 \geq 2\,|x_i||x_j|$$

$$\begin{aligned}\|x\|_1^2 &= \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 + \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n} |x_i||x_j| = \|x\|_2^2 + \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} 2\,|x_i|\,|x_j| \leq \sum_{i=1}^{n-1}\left(\sum_{j=i+1}^{n}\left(|x_i|^2 + |x_j|^2\right)\right)\\ &= \|x\|_2^2 + (n-1)\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 = n\,\|x\|_2^2\end{aligned}$$

Zu (iv): (Wir zeigen $\|x\|_2^2 \leq n\,\|x\|_\infty^2$)

Sei wieder $\|x\|_\infty = |x_{\hat{i}}|$

$$\|x\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \leq n\,x_{\hat{i}}^2 = n\,\|x\|_\infty^2$$

Zeige nun, dass für alle $n \in \mathbb{N}, A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt:

a.) $\|A\|_2 \leq \sqrt{\|A\|_1 \|A\|_\infty}$

b.) $\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_2 \leq \|A\|_1 \leq \sqrt{n}\|A\|_2$

c.) $\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_\infty \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n}\|A\|_\infty$

d.) $\frac{1}{n}\|A\|_\infty \leq \|A\|_1 \leq n\|A\|_\infty$.

Zu a): Es sei ρ der größte Eigenwert von $A^T A$ und z der/ein zugehöriger Eigenvektor. Dann ist:

$\|A\|_2^2 \, \| z \|_1 = \rho \, \| z \|_1 = \|\rho \, z\|_1 = \left\|A^T A \, z\right\|_1 \leq \left\|A^T A\right\|_1 \, \|z\|_1 \leq \left\|A^T\right\|_1 \, \|A\|_1 \, \|z\|_1 = \|A\|_\infty \, \|A\|_1 \, \|z\|_1$

Division durch $\|z\|_1$ und Wurzelziehen liefert die Behauptung.

Alle anderen Ungleichungen – b) bis d) – beweist man wie folgt: (hier für c))

Sei z mit $\| z \|_\infty = 1$ und $\| A \|_\infty = \| A \, z \|_\infty$ gegeben. Dann ist

$$\| A \|_\infty = \| A \, z \|_\infty \overset{(i)}{\leq} \frac{\| A \, z \|_2}{\| z \|_\infty} \overset{(iv)}{\leq} \frac{\| A \, z \|_2}{\frac{1}{\sqrt{n}} \| z \|_2} \leq \sqrt{n} \max_{z \neq 0} \left\{ \frac{\| A \, z \|_2}{\| z \|_2} \right\} = \sqrt{n} \, \| A \|_2$$

Sei z mit $\| z \|_2 = 1$ und $\| A \|_2 = \| A \, z \|_2$ gegeben. Dann ist

$$\| A \|_2 = \| A \, z \|_2 \overset{(iv)}{\leq} \sqrt{n} \, \frac{\| A \, z \|_\infty}{\| z \|_2} \overset{(i)}{\leq} \sqrt{n} \, \frac{\| A \, z \|_\infty}{\| z \|_\infty} \leq \sqrt{n} \max_{z \neq 0} \left\{ \frac{\| A \, z \|_\infty}{\| z \|_\infty} \right\} = \sqrt{n} \, \| A \|_\infty$$