

Lösungshinweise zu den Quadraturformeln auf einem Intervall $[a, b]$

Die Formeln und Fehlerabschätzungen sind auf dem Intervall $[-1, 1]$ bekannt. Sie müssen nun auf das Intervall $[a, b]$ übertragen werden. Die Transformation

$$\begin{array}{ccc} [-1, 1] & \rightarrow & [a, b] \\ g(t) & & f(x) \end{array}$$

wird durch

$$[a, b] \ni x = \frac{b-a}{2} t + \frac{b+a}{2} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{b-a}{2}$$

realisiert. Das bedeutet für das Integral:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{-1}^1 g(t) \frac{dx}{dt} dt = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 g(t) dt.$$

Nun zur Fehlerabschätzung: Da

$$g(t) = f(x(t)) = f\left(\frac{b-a}{2} t + \frac{b+a}{2}\right)$$

folgt

$$\frac{d^m g}{dt^m} = \frac{d^m f}{dx^m} \left(\frac{dx}{dt}\right)^m.$$

Das ergibt für die Fehlerabschätzung der Trapezregel ($R_2^{[-1,1]} f = -2/3 f''(\psi)$)

$$\tilde{R}_2^{[a,b]} f = -\frac{2}{3} f''(\psi) \underbrace{\frac{b-a}{2}}_{\text{Integral}} \underbrace{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2}_{\text{Transformation}} = -\frac{1}{12} f''(\psi) (b-a)^3$$