

# Numerische Mathematik I für Ingenieure SS10

## Verständnisfragen – Hausübung 2

<b>VF-1:</b> Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ beliebig. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!	
1.	$\ A\ _\infty = \ A^T\ _1$
2.	Falls $A$ invertierbar ist, gilt $\ AA^{-1}\  = \ A\  \ A^{-1}\ $ .
3.	$\kappa(A) = 1 \Rightarrow A = I$
4.	$\kappa(A) = \ A\  \ A^T\ $

<b>VF-2:</b> Seien $\mathbb{M}(b, m, r, R)$ eine Menge von Maschinenzahlen (normalisierte Gleitpunktdarstellung), $x_{min}$ die kleinste (strikt) positive Zahl in $\mathbb{M}(b, m, r, R)$ und $\text{fl} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{M}$ die zugehörige Reduktionsabbildung. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!	
1.	Die betragsmäßig kleinste darstellbare Zahl ist $x_{min} = b^{-r-1}$ .
2.	Für die betragsmäßig kleinste darstellbare Zahl $x_{min}$ gilt $\text{fl}(1 + x_{min}) = 1$ .
3.	Die relative Maschinengenauigkeit ist $\text{eps} := \frac{b^{1-m}}{2}$ .
4.	$\text{fl}$ ist stetig auf $\mathbb{R}$ .

<b>VF-3:</b> Seien $A, B$ beliebige $n \times n$ -Matrizen mit reellen Einträgen. Weiter sei $\ \cdot\ $ eine Matrixnorm. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!	
1.	$\ A + B\  \leq \ A\  + \ B\ $
2.	$\ A - B\  \leq \ A\  - \ B\ $
3.	$\ \lambda A + \mu B\  \leq \lambda \ A\  + \mu \ B\ , \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$
4.	$\ AB\  \leq \ A\  \ B\ $

<b>VF-4:</b> Gegeben sei die Funktion $f(x, y) := (x^3 - 1) \sin y$ , die an verschiedenen Stellen $(x, y)$ ausgewertet werden soll. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!	
1.	$f$ ist in der Nähe von $(0, 0)$ gut konditioniert.
2.	$f$ ist für alle $(x, y) \in [-0.5, 0.5] \times [-1, 1] \setminus \{(0, 0)\}$ gut konditioniert.
3.	$f$ ist in der Nähe von $(1, 1)$ gut konditioniert.
4.	$f$ ist für alle $(x, y)$ mit $x < 0$ und $y \neq i\pi, i \in \mathbb{Z}$ gut konditioniert.

<b>VF-5:</b> Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!		
1.	Die Division zweier von Null verschiedener Zahlen ist stets gut konditioniert.	
2.	Bei einem stabilen Algorithmus ist die Abweichung im Ergebnis von derselben Größenordnung wie der durch die Kondition des Problems bedingte Fehler.	
3.	Nur für gut konditionierte Probleme gibt es auch stabile Algorithmen.	
4.	Die Funktion $f(x, y) := x - y$ ist gut konditioniert für alle $x < 0, y > 0$ .	

<b>VF-6:</b> Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!		
1.	Die Addition zweier betragsmäßig nahezu gleich großer Zahlen mit unterschiedlichen Vorzeichen ist schlecht konditioniert.	
2.	Die Multiplikation zweier nahezu gleich großer Zahlen ist schlecht konditioniert.	
3.	Die Auswertung der Funktion $x e^x$ ist gut konditioniert für alle $x$ mit $ x  \leq 1$ .	
4.	Die Konditionszahl einer Funktion gibt an, wie stark sich Eingabefehler aufgrund von Instabilitäten im verwendeten Algorithmus verstärken.	

<b>VF-7:</b> Es seien $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zwei mal stetig differenzierbar und $\alpha > 0$ . Dann gilt für die relativen Konditionszahlen $\kappa_{\text{rel}}(f, x) := \left  \frac{x \cdot f'(x)}{f(x)} \right $ :		
1.	$\kappa_{\text{rel}}(\alpha f, x) = \kappa_{\text{rel}}(f, x)$	
2.	$\kappa_{\text{rel}}(f + g, x) = \kappa_{\text{rel}}(f, x) + \kappa_{\text{rel}}(g, x)$	
3.	$\kappa_{\text{rel}}(f * g, x) = \kappa_{\text{rel}}(f, x) + \kappa_{\text{rel}}(g, x)$	
4.	$\kappa_{\text{rel}}(f/g, x) = \kappa_{\text{rel}}(f, x) / \kappa_{\text{rel}}(g, x)$	