Numerische Mathematik I für Ingenieure SS10
Verständnisfragen – Hausübung 3

VF-1: Es seien x_{MIN} bzw. x_{MAX} die kleinste bzw. größte (strikt) positive Zahl sowie eps die relative Maschinengenauigkeit in der Menge $\mathbb{M}(b,m,r,R)$ der Maschinenzahlen gemäß Vorlesung/Buch und $\mathbb{D} := [-x_{\text{MAX}}, -x_{\text{MIN}}] \cup [x_{\text{MIN}}, x_{\text{MAX}}]$. Ferner beschreibe $\text{fl} : \mathbb{D} \to \mathbb{M}(b,m,r,R)$ die Standardrundung. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!		
1.	In $\mathbb{M}(10,3,-8,8)$ gilt $\left\lvert\frac{\text{fl}(x)-x}{x}\right\rvert = (1+\varepsilon)x$ mit $\lvert\varepsilon\rvert \leq 10^{-3}$ $\forall x \in \mathbb{D}$.	
2.	In $\mathbb{M}(10,4,-8,8)$ gilt $\text{eps} = 5 \cdot 10^{-4}$.	
3.	In $\mathbb{M}(10,3,-8,8)$ gilt $x_{\text{MIN}} = 10^{-8}$.	
4.	In $\mathbb{M}(10,4,-8,8)$ gilt $x_{\text{MAX}} = 99990000$.	

VF-2: Es seien x_{MIN} bzw. x_{MAX} die kleinste bzw. größte (strikt) positive Zahl sowie eps die relative Maschinengenauigkeit in der Menge $\mathbb{M}(b,m,r,R)$ der Maschinenzahlen gemäß Vorlesung/Buch und $\mathbb{D} := [-x_{\text{MAX}}, -x_{\text{MIN}}] \cup [x_{\text{MIN}}, x_{\text{MAX}}]$. Ferner beschreibe $\text{fl} : \mathbb{D} \to \mathbb{M}(b,m,r,R)$ die Standardrundung. Alle Zahlenangaben sind im 10er-System. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!		
1.	In $\mathbb{M}(7,3,-10,10)$ gilt $\left\lvert\frac{\text{fl}(x)-x}{x}\right\rvert \leq \frac{1}{98}$ $\forall x \in \mathbb{D}$.	
2.	In $\mathbb{M}(100,4,-8,8)$ gilt $x_{\text{MIN}} = 10^{-10}$.	
3.	In $\mathbb{M}(5,8,-2,9)$ gilt $x_{\text{MIN}} = 0.008$.	
4.	In $\mathbb{M}(3,2,-4,3)$ gilt $x_{\text{MAX}} = 18$.	

VF-3: Es seien x_{MIN} bzw. x_{MAX} die kleinste bzw. größte (strikt) positive Zahl sowie eps die relative Maschinengenauigkeit in der Menge $\mathbb{M}(b,m,r,R)$ der Maschinenzahlen gemäß Vorlesung/Buch und $\mathbb{D} := [-x_{\text{MAX}}, -x_{\text{MIN}}] \cup [x_{\text{MIN}}, x_{\text{MAX}}]$. Ferner beschreibe $\text{fl} : \mathbb{D} \to \mathbb{M}(b,m,r,R)$ die Standardrundung. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!		
1.	$\lvert\text{fl}(x) - x\rvert \leq \text{eps}$ für alle $x \in \mathbb{D}$.	
2.	$\left\lvert\frac{\text{fl}(x)-x}{x}\right\rvert \leq \text{eps}$ für alle $x \in \mathbb{D}$.	
3.	Für jedes $x \in \mathbb{D}$ existiert eine Zahl ε mit $\lvert\varepsilon\rvert \leq \text{eps}$ und $\text{fl}(x) = (1+\varepsilon)x$.	
4.	Für jedes $x \in \mathbb{D}$ existiert eine Zahl ε mit $\lvert\varepsilon\rvert \leq \text{eps}$ und $\text{fl}(x) = x + \varepsilon$.	

VF-4: Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ habe (in der betrachteten Matrixnorm) die Konditionszahl $\kappa(A)$. Die rechte Seite $b \in \mathbb{R}^n$ sei mit einem relativen Fehler ε behaftet. Bei der Berechnung von $x := A^{-1}b$ muss man mit einem relativen Fehler in der folgenden Größenordnung rechnen:

1.	$\|A\|\,\varepsilon$	
2.	$\kappa(A)\,\varepsilon$	
3.	$\kappa(A^{-1})\,\varepsilon$	
4.	$\|A^{-1}\|\,\varepsilon$	

VF-5: Mit $b, \tilde{b}, x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ und $A, \tilde{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sowie $Ax = b$ und $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$ seien $r_b := \frac{\|\tilde{b}-b\|}{\|b\|}$, $r_x := \frac{\|\tilde{x}-x\|}{\|x\|}$ und $r_A := \frac{\|\tilde{A}-A\|}{\|A\|}$ die relativen Fehler der rechten Seite, der Lösung und der Matrix, und es gelten die Definitionen $\kappa_A := \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ sowie $h := \|\tilde{A} - A\| \cdot \|A^{-1}\|$. Hierbei sei $\|\cdot\|$ eine Vektornorm auf $\mathbb{R}^n$ bzw. die zugehörige Matrix–Norm auf $\mathbb{R}^{n \times n}$, und es sei $\|b\|, \det(A) \neq 0$ vorausgesetzt. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!

1.	Es gilt stets $r_x \leq \kappa_A \frac{r_A + r_b}{1-h}$.	
2.	$r_x \leq \kappa_A \frac{r_A + r_b}{1-h}$ gilt stets, wenn $h < 1$ gilt.	
3.	$\|\tilde{x} - x\| \leq \|A\|^{-1} \cdot \|\tilde{b} - b\|$ gilt stets, wenn $h = 0$ gilt.	
4.	$\|\tilde{x} - x\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\tilde{b} - b\|$ gilt stets, wenn $h = 0$ gilt.	

VF-6: Gegeben seien eine reguläre Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und eine rechte Seite $b \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt für das zugehörige lineare Gleichungssystem $A\,x = b$:

1.	Das Problem ist immer gut konditioniert.	
2.	Bei Störung der Eingabedaten A und b wird der relative Fehler in der Lösung in Abhängigkeit vom relativen Eingabefehler maximal durch den Faktor $\kappa(A)$ verstärkt.	
3.	Die Lösung des linearen Gleichungssystems kann immer mit dem Standard-Gauß-Algorithmus (ohne Spaltenpivotisierung) berechnet werden.	
4.	Zeilenäquilibrierung verbessert immer die Kondition der Matrix A bezüglich der 2-Norm.	