Numerische Mathematik I für Ingenieure SS10
Verständnisfragen – Hausübung 5

VF-1: Es seien $A \in R^{n\times n}$ regulär, $b \in \mathbb{R}^n$ und gesucht sei die Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ von $Ax = b$. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!

1.	Durch Pivotisierung kann die Stabilität der LR-Zerlegung verbessert werden.	
2.	Pivotisierung verbessert die Kondition des linearen Gleichungssystems.	
3.	Zeilenäquilibrierte Matrizen sind immer gut konditioniert.	
4.	Das Cholesky-Verfahren ist nur mit Pivotisierung stabil.	

VF-2: Es seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch positiv definit, $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine normierte untere Dreiecksmatrix und $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Diagonalmatrix. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!

1.	A hat nur positive Eigenwerte.	
2.	Das Cholesky-Verfahren zur Bestimmung der Zerlegung $A = LDL^T$ ist nur dann stabil, wenn man Pivotisierung benutzt.	
3.	Der Aufwand des Cholesky-Verfahrens zur Bestimmung der Zerlegung $A = LDL^T$ ist ca. $\frac{1}{3}n^3$ Operationen.	
4.	Es sei $A = LDL^T$. Dann gilt $d_{i,i} > 0\ \forall i = 1, \ldots, n$, wobei $d_{i,i}$ die Diagonaleinträge der Matrix D sind.	

VF-3: Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine allgemeine, reguläre Matrix und $x, b \in \mathbb{R}^n$ mit $A\,x = b$. Weiter sei $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine reguläre, obere Dreiecksmatrix und $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische, positiv–definite Matrix. Die Zahl der benötigten Operationen (kurz "Ops") (nur Multiplikationen und Divisionen) benutzen wir gemäß Vorlesung / Buch. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!

1.	Die Lösung von $R\,x = b$ benötigt $n^3 + \mathcal{O}(n^2)$ Ops	
2.	Die Lösung von $A\,x = b$ per Gaußelimination benötigt $\frac{n^3}{3} + \mathcal{O}(n^2)$ Ops	
3.	Die Lösung von $S\,x = b$ per Choleskyzerlegung benötigt $\frac{n^3}{3} + \mathcal{O}(n^2)$ Ops	
4.	Die Lösung von $S\,x = b$ per Choleskyzerlegung benötigt $\frac{n^3}{6} + \mathcal{O}(n^2)$ Ops	

VF-4: Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Die Abkürzung "spd" stehe für symmetrisch und positiv–definit. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!

1.	A spd $\Longrightarrow$ A ist invertierbar	
2.	A spd $\Longrightarrow$ A^{-1} ist ebenfalls spd	
3.	A symmetrisch und alle Diagonalelemente von A strikt positiv $\Longrightarrow$ A ist spd	
4.	A ist eine spd–Matrix genau dann, wenn es eine obere Dreiecksmatrix R mit strikt positiven Diagonalelementen und $A = R^T\,R$ gibt.	