Numerische Mathematik I für Ingenieure SS10
Verständnisfragen – Hausübung 7

VF-1: Seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $QR = A$ eine Zerlegung von A mit Q orthogonal und R eine rechte, obere Dreiecksmatrix. Weiter seien $b \in \mathbb{R}^n$ und $x \in \mathbb{R}^n$. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.		
1.	$Ax = b \Leftrightarrow Rx = Q^T b$	
2.	$\kappa_2(A) = \kappa_2(Q^{-1})\kappa_2(R)$	
3.	Zur Lösung von $Ax = b$ über die QR-Zerlegung muss Q explizit bestimmt werden.	
4.	$\mathrm{Rang}(A) = \mathrm{Rang}(R)$	

VF-2: Es sei $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Householder-Transformation und $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Einheitsmatrix. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.		
1.	Es existiert stets ein $v \in \mathbb{R}^n$, so dass $Q = I - \frac{vv^T}{v^Tv}$.	
2.	Es gilt stets $Q = Q^T$.	
3.	Es existiert stets ein $v \in \mathbb{R}^n$, so dass $Qy = y$ für alle $y \in \mathbb{R}^n$ mit $y^T v = 0$.	
4.	Es existiert stets ein $v \in \mathbb{R}^n$, so dass für alle $y \in \mathbb{R}^n$ mit $y^T v = 0$ gilt: $Qy = y$.	

VF-3: Gegeben seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $m > n$ und eine rechte Seite $b \in \mathbb{R}^m$. Es sei $x^* \in \mathbb{R}^n$ eine Least-Squares-Lösung des zugehörigen linearen Ausgleichsproblems. Dann gilt:		
1.	x^* ist Lösung von $A^T Ax^* = A^T b$.	
2.	$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_1 = \|Ax^* - b\|_1$.	
3.	x^* ist die eindeutige Lösung des linearen Ausgleichsproblems.	
4.	Beim Lösen des linearen Ausgleichsproblems über die Normalgleichungen werden die entstehenden Rundungsfehler mit $\kappa_2(A^T A)$ verstärkt.	

VF-4: Es seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m \gg n$, $b \in \mathbb{R}^m$ und gesucht sei die Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ zu $\|A\,x - b\|_2 \to \min$. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.		
1.	$\|\|A\|\|_2 = \|\|QA\|\|_2$ für alle orthogonalen Matrizen $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$	
2.	$\|\|Ax - b\|\|_2 = \min \Leftrightarrow Ax - b \perp \mathrm{Bild}(A)$.	
3.	Für reguläre Matrizen A gilt im Allgemeinen: $\kappa_2(A^T A) \approx 2\kappa_2(A)$.	
4.	Es existiert stets ein eindeutiges $x^* \in \mathbb{R}^n$ mit $A^T Ax^* = A^T b$.	