

# Numerische Mathematik I für Ingenieure SS10

## Verständnisfragen – Übung 8

**VF-1:** Es seien  $m > n$ ,  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $b, \tilde{b} \in \mathbb{R}^m$  und  $x^* \in \mathbb{R}^n$  die Lösung des linearen Ausgleichproblems  $\|Ax^* - b\|_2 = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2$ . Weiter sei  $\Theta \in [0, \frac{\pi}{2})$  der Winkel zwischen  $Ax^*$  und  $b$  sowie  $\tilde{x}$  die Lösung des gestörten Problems  $\|A\tilde{x} - \tilde{b}\|_2 = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - \tilde{b}\|_2$ . Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!

1.	$\frac{\ \tilde{x} - x^*\ _2}{\ x^*\ _2} \leq \frac{\kappa_2(A) \ \tilde{b} - b\ _2}{\sin \Theta \ b\ _2}$	
2.	$\frac{\ \tilde{x} - x^*\ _2}{\ x^*\ _2} \leq \frac{\kappa_2(A) \ \tilde{b} - b\ _2}{\cos \Theta \ b\ _2}$	
3.	$\frac{\ \tilde{x} - x^*\ _2}{\ x^*\ _2} \leq \tan \Theta \kappa_2(A) \frac{\ \tilde{b} - b\ _2}{\ b\ _2}$	
4.	Je größer der Winkel $\Theta$ , desto schlechter ist das Problem konditioniert.	

**VF-2:** Es seien  $m \gg n$ ,  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$ . Es soll die Lösung  $x^*$  des linearen Ausgleichproblems  $\|Ax^* - b\|_2 = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2$  bestimmt werden. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!

1.	Der Aufwand bei Lösung mit Normalgleichungen beträgt etwa $\frac{1}{2}n^3$ .	
2.	Der Aufwand bei Lösung mit Householder-Transformationen beträgt etwa $mn^2$ .	
3.	Die Lösung mit Normalgleichungen ist stabiler als mit QR-Zerlegung.	
4.	Die Lösung mit Normalgleichungen ist schneller als mit QR-Zerlegung.	

**VF-3:** Sei  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  mit  $m \geq n$ . Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!

1.	Alle Eigenwerte von $A^T A$ sind größer als 0.	
2.	Wenn alle Spalten von $A$ linear unabhängig sind, dann ist $A^T A$ symmetrisch positiv definit.	
3.	Wenn alle Zeilen von $A$ linear unabhängig sind, dann ist $AA^T$ symmetrisch positiv definit.	
4.	Wenn alle Zeilen von $A$ linear unabhängig sind, dann ist $AA^T$ invertierbar.	