Numerische Mathematik I für Ingenieure SS10
Verständnisfragen – Hausübung 11

VF-1: Sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, mit $m > n$. Wir betrachten das (nichtlineare) Ausgleichsproblem $\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|F(x)\|_2$. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch! Beim Levenberg-Marquardt-Verfahren wird die Korrektur s^k durch folgende Minimierungsaufgabe festgelegt ($\mu > 0$ ein zu wählender Parameter):

1.	Finde $s^k \in \mathbb{R}^n$ so, dass $\|F'(x^k)s^k + F(x^k)\|_2 + \mu\|s^k\|_2 = \min$	
2.	Finde $s^k \in \mathbb{R}^n$ so, dass $\|F'(x^k)s^k + F(x^k)\|_2^2 + \mu^2\|s^k\|_2^2 = \min]$	
3.	Finde $s^k \in \mathbb{R}^n$ so, dass $\left\| \begin{pmatrix} F'(x^k) \\ \mu I \end{pmatrix} s^k + \begin{pmatrix} F(x^k) \\ \emptyset \end{pmatrix} \right\|_2 = \min$	
4.	Finde $s^k \in \mathbb{R}^n$ so, dass $\left\| \mu \begin{pmatrix} F'(x^k) \\ I \end{pmatrix} s^k + \begin{pmatrix} F(x^k) \\ \emptyset \end{pmatrix} \right\|_2 = \min$	

VF-2: Sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ hinreichend oft differenzierbar mit $m > n$ und $x^* \in \mathbb{R}^n$ so, dass $\|F(x^*)\|_2 = \min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} \|F(x)\|_2$. Sei $\varphi(x) := \frac{1}{2}F(x)^T F(x)$. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!

1.	$\varphi(x^*) = \min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} \|F(x)\|_2$.	
2.	$\varphi(x^*) = \min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} \varphi(x)$.	
3.	$\nabla\varphi(x^*) = 0$.	
4.	Die Aufgabe $\min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} \varphi(x)$ ist einfacher zu lösen als die Aufgabe $\min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} \|F(x)\|_2$.	

VF-3: Sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit $m > n$. Wir betrachten das (nichtlineare) Ausgleichsproblem $\min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} \|F(x)\|_2$. Wir nehmen an, dass Rang $F'(x) = n$ für alle x. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!

1.	Ein Gauß-Newton-Verfahren kann mit einer Dämpfungsstrategie kombiniert werden.	
2.	Lokale Maxima oder Sattelpunkte der Funktion $x \mapsto \|F(x)\|_2^2$ sind für das Gauß-Newton-Verfahren immer abstoßend.	
3.	Lokale Konvergenz des Gauß-Newton-Verfahren in einer Umgebung eines (lokalen) Minimums x^* ist gesichert, falls $\|F(x^*)\|_2$ hinreichend klein ist und alle Komponenten von $F''(x)$ beschränkt sind.	
4.	Falls die Gauß-Newton-Methode konvergiert, ist die Konvergenzordnung der Methode im Allgemeinen genau 1.	

VF-4: Es sei $\Pi_n = \left\{ \sum_{j=0}^n a_j\, x^j \;\middle|\; a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \right\}$ der Raum der Polynome vom Grade (höchstens) n. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!

1.	$\{1,\, x,\, x^2, \ldots, x^n\}$ bildet eine Basis von Π_n.	
2.	$\{\alpha_0,\, \alpha_1 x,\, \alpha_2 x^2, \ldots, \alpha_n x^n\}$ bildet für beliebige, nicht verschwindende Koeffizienten $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ eine Basis von Π_n.	
3.	$\left\{1,\, x - \alpha_1,\, (x - \alpha_1)(x - \alpha_2),\, \ldots,\, \prod_{i=1}^n (x - \alpha_i)\right\}$ bildet für beliebige Koeffizienten $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ eine Basis von Π_n.	
4.	Der Raum Π_n hat die Dimension n.	