Numerische Mathematik I für Ingenieure SS10
Verständnisfragen – Hausübung 13

VF-1: Sei $P(f\|x_0,\dots,x_n)$ das Lagrange-Interpolationspolynom zu den Daten $f(x_i)$, $i=0,\dots,n$ mit den Stützstellen $a=x_0<\dots<x_n=b$ für $n\in\mathbb{N}$. Sei $e(x):=f(x)-P(f\|x_0,\dots,x_n)$, $x\in\mathbb{R}$ der Fehler im Intervall $I:=[\min(a,x),\max(b,x)]$. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!		
1.	$e(x_i)=0$, $i=0,\dots,n$.	
2.	Für $f\in C^{n+1}(I)$ existiert ein $\xi\in I$, so dass $e(x)=\prod_{i=0}^n(x-x_i)\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)$.	
3.	Es sei $[c,d]\subsetneq I$. Der Interpolationsfehler lässt sich dann für alle $x\in[c,d]$ wie folgt abschätzen: $\|e(x)\|\le\max_{z\in[c,d]}\|\prod_{i=0}^n(z-x_i)\|\max_{z\in[c,d]}\frac{\|f^{(n+1)}(z)\|}{(n+1)!}$.	
4.	Sei $f(x)=1/(1+x^2)$, $x\in[-5,5]$. Für festes $n\in\mathbb{N}$ seien die Stützstellen $x_{j,n}=-5+10\,j/n$, $j=0,\dots,n$ gegeben. Dann gilt für den Fehler: $\lim_{n\to\infty}\max_{x\in[-5,5]}\|f(x)-P(f\|x_0,\dots,x_n)\|=0$.	

VF-2: Es sei $P(f\mid x_0,\dots,x_n)$ das Interpolationspolynom zu den Daten $(x_0,f(x_0)),\dots,(x_n,f(x_n))$ mit $x_0<\dots<x_n$, und $x,x^*\in[x_0,x_n]$. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!		
1.	$P(f\mid x_0,\dots,x_n)$ kann man an der Stelle x^* effizient mit dem Neville-Aitken-Schema auswerten.	
2.	$P(f\mid x_0,\dots,x_n)$ kann man effizient mit dem Neville-Aitken-Schema bestimmen.	
3.	$P(f\mid x_0,\dots,x_n)$ lässt sich sowohl mit dem Newton-Schema als auch mittels der Lagrange-Fundamentalpolynome aufstellen.	
4.	Sowohl die Newton-Interpolation als auch das Neville-Aitken-Schema haben zur Auswertung von $P(f\mid x_0,\dots,x_n)(x)$ einen Aufwand von $\mathcal{O}\left(n^2\right)$	

VF-3: Sei $P(f\|x_0,\dots,x_n)$ das Lagrange-Interpolationspolynom zu den Daten $f(x_i)$, $i=0,\dots,n$ mit den Stützstellen $x_0<\dots<x_n$ für $n\in\mathbb{N}$. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!		
1.	Seien l_{jn} die Lagrangeschen Fundamentalpoynome. Dann gilt für das Interpolationspolynom: $P(f\|x_0,\dots,x_n)(x)=\sum_{j=0}^n f(x_j)\,l_{jn}(x)$, $x\in\mathbb{R}$.	
2.	$P(f\|x_0,\dots,x_n)=\sum_{j=0}^n a_j\,x^j$ ist immer ein Polynom vom Grad n mit $a_n\neq 0$.	
3.	Es existiert genau ein Polynom $p\in\Pi_n$ mit $p(x_i)=f(x_i)$, $i=0,\dots,n$.	
4.	$P(f\|x_0,\dots,x_n)(x_i)=f(x_i)$, $i=0,\dots,n$.	

VF-4: Sei $f \in C[a,b]$. Das Integral $I(f) := \int_a^b f(x)dx$ werde durch eine Newton-Cotes-Formel $I_m(f)$ zu Stützstellen $a \leq x_0 < \ldots < x_m \leq b$ approximiert. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!		
1.	$I_m(f) = \int_a^b P(f\|x_0,\ldots,x_m)dx$ wobei $P(f\|x_0,\ldots,x_m)$ das Interpolationspolynom von f zu den Stützstellen $x_0 < \ldots < x_m$ ist.	
2.	$I_m(q) = I(q)$ für alle $q \in \Pi_m$.	
3.	Falls $f \in C^{m+1}[a,b]$, dann gilt für den Fehler $\|I(f) - I_m(f)\| \leq \frac{(b-a)^{m+1}}{(m+1)!} \max_{x\in[a,b]} \left\|f^{(m+1)}(x)\right\|$.	
4.	Bei Newton-Cotes-Formeln höherer Ordnung kann Auslöschung auftreten (instabil).	

VF-5: Das Integral $I(f) := \int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x$ soll numerisch approximiert werden durch eine Quadraturformel $(d-c)\sum_{j=0}^m c_j f(x_j)$, mit $c \leq x_0 < \ldots < x_m \leq d$. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!		
1.	Newton-Cotes-Formeln basieren auf der analytischen Integration eines Interpolationspolynoms an f mit äquidistanten Stützstellen x_j.	
2.	Bei allen Newton-Cotes-Quadraturformeln hängen die Integrationsgewichte c_j nicht von der Funktion f ab.	
3.	Die Newton-Cotes-Formeln sind stets exakt, wenn f ein Polynom vom Grade $\leq m+1$ ist.	
4.	Die Gewichte c_j sind bei Newton-Cotes-Quadraturformeln immer alle positiv.	

VF-6: Sei $f \in C[a,b]$. Das Integral $I(f) := \int_a^b f(x)dx$ werde durch eine Gauss-Formel $\tilde{I}_m(f) := \sum_{i=0}^m \omega_i\, f(x_i)$ approxomiert. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!		
1.	Die Stützstellen sind äquidistant verteilt.	
2.	$\tilde{I}_m(q) = I(q)$ für alle $q \in \Pi_{2m+1}$.	
3.	Die Gewichte ω_i sind alle positiv.	
4.	Falls $f \in C^{2m+2}[a,b]$, dann gibt es ein c_m, so dass für den Fehler gilt: $\|I(f) - \tilde{I}_m(f)\| \leq c_m \max_{x\in[a,b]} \left\|f^{(2m+2)}(x)\right\|$.	