Numerische Mathematik I für Ingenieure SS10
Verständnisfragen – Übung 13

VF-1: Gegeben seien die Daten $f(x_0)$, $f(x_1)$, …, $f(x_n)$ mit $x_0, \dots, x_n$ paarweise verschiedenen und $n \geq 3$, $a := \min\{x_0, \dots, x_n\}$, $b := \max\{x_0, \dots, x_n\}$ sowie $x \in \mathbb{R}$. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!		
1.	Das aus der Vorlesung bekannte Lagrange-Interpolationsproblem zu den Stützstellen $x_0, \dots, x_n$ ist stets eindeutig lösbar.	
2.	Für beliebiges $f \in C^n[a,b]$, gilt: $$\max_{x\in[a,b]} \lvert f(x) - P(f\vert x_0, \dots, x_n)(x)\rvert \leq \max_{x\in[a,b]} \left\lvert \prod_{j=0}^{n-1} (x - x_j) \right\rvert \max_{x\in[a,b]} \frac{\lvert f^{(n)}(x)\rvert}{n!}$$	
3.	Durch Erhöhung der Stützstellenzahl und der damit verbundenen Erhöhung des Polynomgrades erhält man beliebig gute Approximationen für die zu interpolierende Funktion (bezüglich der Norm $\lVert.\rVert_\infty$).	
4.	Für $g(x) := 2x^n - \pi x^2$ gilt: $g(x) = P(g\vert x_0, x_2, x_n)(x)$.	

VF-2: Es seien $x_0, \dots, x_n$ paarweise verschiedene Stützstellen und $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!		
1.	Der Wert $[x_0, x_1, \dots, x_n]f$ hängt nicht von der Reihenfolge der Stützstellen ab.	
2.	Für die Newton-Basispolynome (Knotenpolynome) ω_j gilt: $[x_0, \dots x_k]\omega_j = \delta_{jk}$ für $j, k = 0, \dots, n$.	
3.	Der Rechenaufwand zur Berechnung der Koeffizienten in den Newtonschen Interpolationsformeln mit dem Schema der dividierten Differenzen beträgt $\frac{1}{2}n^2$ Divisionen und n^2 Subtraktionen.	
4.	Für numerische Berechnungen ist die Darstellung des Polynomes in Potenzform (Normalform) stets geeignet.	

VF-3: Seien $f \in C[a,b]$ und $I(f) := \int_a^b f(x)dx$ das Integral von f auf $[a,b]$. Ferner sei $Q(f) = \sum_{i=0}^m \omega_i\, f(x_i)$ eine Quadraturformel. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!		
1.	Die absolute Kondition des Integrationsproblems $I(f)$ bzgl. der Maximumnorm ist gut.	
2.	Die relative Kondition des Integrationsproblems $I(f)$ bzgl. der Maximumnorm ist gut.	
3.	Falls die Quadraturformel exakt ist vom Grad n, dann gilt für alle $p \in \Pi_n$: $I(p) = Q(p)$.	
4.	Die Gewichte ω_i einer Quadraturformel sind immer positiv.	

VF-4: Das Integral $I(f) := \int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x$ soll numerisch approximiert werden durch geeignete Quadraturformeln. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!		
1.	Der Fehler der Mittelpunktsregel ist stets genau halb so groß wie der Fehler der Trapezregel.	
2.	Die Mittelpunktsregel ist stets exakt, wenn f ein Polynom vom Grade ≤ 2 ist.	
3.	Die summierte Mittelpunktsregel ist stets exakt, wenn f ein Polynom vom Grade ≤ 2 ist.	
4.	Die Simpsonregel ist stets exakt, wenn f ein Polynom vom Grade ≤ 3 ist.	