

Numerische Mathematik I für Ingenieure SS11

Verständnisfragen – Hausübung 6

VF-1: Mit $A, L, R, P, D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ seien R bzw. L eine rechte obere bzw. normierte linke untere Dreiecksmatrix, P eine Permutationsmatrix und D eine Diagonalmatrix. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!

1.	Ist A regulär, so existiert stets eine LR -Zerlegung mit Permutationsmatrix P , so dass $PA = LR$ gilt.	wahr
2.	Ist A regulär, so existiert stets eine LR -Zerlegung mit Permutationsmatrix P und Diagonalmatrix D , so dass $PDA = LR$ gilt.	wahr
3.	Aus $PDA = LR$ folgt, dass A genau dann positiv definit ist, wenn alle Diagonalelemente von D positiv sind.	falsch
4.	Beschreibt die Diagonalmatrix D eine Zeilenäquilibrierung, so folgt aus $B := DA$ die Ungleichung $\kappa_B \geq \kappa_A$ für die Konditionszahlen von A und B bezüglich der $\ \cdot\ _\infty$ -Norm.	falsch

VF-2: Es seien $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch positiv definit, $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine normierte untere Dreiecksmatrix und $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Diagonalmatrix. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!

1.	A hat nur positive Eigenwerte.	wahr
2.	Das Cholesky-Verfahren zur Bestimmung der Zerlegung $A = LDL^T$ ist nur dann stabil, wenn man Pivotisierung benutzt.	falsch
3.	Der Aufwand des Cholesky-Verfahrens zur Bestimmung der Zerlegung $A = LDL^T$ ist ca. $\frac{1}{3}n^3$ Operationen.	falsch
4.	Es sei $A = LDL^T$. Dann gilt $d_{i,i} > 0 \forall i = 1, \dots, n$, wobei $d_{i,i}$ die Diagonaleinträge der Matrix D sind.	wahr

VF-3: Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine allgemeine, reguläre Matrix und $x, y, b \in \mathbb{R}^n$ mit $Ax = b$. Weiter sei $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine reguläre, obere Dreiecksmatrix und $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische, positiv-definite Matrix. Die Zahl der benötigten Operationen (kurz "Ops") (nur Multiplikationen und Divisionen) benutzen wir gemäß Vorlesung / Buch. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!

1.	Die Lösung von $Ly = b$ benötigt $n^3 + \mathcal{O}(n^2)$ Ops	falsch
2.	Die Lösung von $Ax = b$ per Gaußelimination benötigt $\frac{n^3}{3} + \mathcal{O}(n^2)$ Ops	wahr
3.	Die Lösung von $Sx = b$ per Choleskyzerlegung benötigt $\frac{n^3}{3} + \mathcal{O}(n^2)$ Ops	falsch
4.	Die Lösung von $Sx = b$ per Choleskyzerlegung benötigt $\frac{n^3}{6} + \mathcal{O}(n^2)$ Ops	wahr

VF-4: Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Die Abkürzung “spd” stehe für symmetrisch und positiv-definit. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!		
1.	A ist invertierbar und symmetrisch $\implies A$ spd.	falsch
2.	A ist nur dann spd, wenn A^{-1} ebenfalls spd ist	wahr
3.	A symmetrisch und alle Diagonalelemente von A strikt positiv $\implies A$ ist spd	falsch
4.	A ist eine spd-Matrix genau dann, wenn es eine obere Dreiecksmatrix R mit strikt positiven Diagonalelementen und $A = R^T R$ gibt.	wahr

VF-5: Mit $A, L, D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sei L eine normierte linke untere Dreiecksmatrix und D eine Diagonalmatrix. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!		
1.	Ist A regulär, so existiert stets eine LDL^T -Zerlegung mit $A = LDL^T$.	falsch
2.	Ist A positiv definit und symmetrisch, so existiert stets eine LDL^T -Zerlegung mit $A = LDL^T$, wobei alle Diagonalelemente von D positiv sind.	wahr
3.	Nur mithilfe einer zusätzlichen Pivottisierung kann man garantieren, dass beim Cholesky-Algorithmus keine Division durch Null auftritt.	falsch
4.	Nur für positiv definite Matrizen A kann man mit dem Cholesky-Algorithmus eine Zerlegung $A = LDL^T$ finden.	falsch