Numerische Mathematik I für Ingenieure SS11
Verständnisfragen – Hausübung 5

VF-1: Es seien $A \in R^{n\times n}$ regulär, $b \in \mathbb{R}^n$ und gesucht sei die Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ von $Ax = b$. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!		
1.	Durch Pivotisierung kann die Stabilität der LR-Zerlegung verbessert werden.	
2.	Pivotisierung verbessert die Kondition des linearen Gleichungssystems.	
3.	Zeilenäquilibrierte Matrizen sind immer gut konditioniert.	
4.	Das Cholesky-Verfahren ist nur mit Pivotisierung stabil.	

VF-2: Es seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ beliebig aber regulär, $b \in \mathbb{R}^n$ und gesucht sei die Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ von $Ax = b$.		
1.	Es sei $\kappa(A)$ die Konditionszahl der Matrix A. Es gilt $\kappa(A) = \kappa(A^{-1})$.	
2.	Es sei $\tilde{x}$ die Lösung des gestörten Problems $A\tilde{x} = \tilde{b}$ und $\kappa(A)$ die Konditionszahl der Matrix A bezüglich $\|\cdot\|$. Es gilt $\|\tilde{x} - x\| \leq \kappa(A)\|\tilde{b} - b\|$.	
3.	Zu A existiert eine eindeutige Zerlegung $A = LR$.	
4.	Das Lösen des Gleichungssystems über LR-Zerlegung ohne Pivotisierung aber mit Zeilenäquilibrierung ist ein stabiles Verfahren.	

VF-3: Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ beliebig aber regulär.		
1.	Sei $\kappa(A)$ die Konditionszahl der Matrix A. Es gilt $\kappa(A^2) = \kappa(A)^2$.	
2.	Sei A symmetrisch. Dann gilt $\|A\|_\infty = \|A\|_1$.	
3.	Sei D_z die Diagonalmatrix mit Diagonaleinträgen definiert durch $d_i = \left(\sum_{j=1}^n \|a_{ij}\|\right)^{-1}$. Für die Skalierung mit D_z gilt: $\kappa_\infty(D_z\, A) \leq \kappa_\infty(D\, A)$ für jede reguläre Diagonalmatrix D.	
4.	Zu A existiert eine Zerlegung $A = LR$, mit einer normierten unteren Dreiecksmatrix L und einer oberen Dreiecksmatrix R .	

VF-4: Es seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ beliebig aber regulär, $b \in \mathbb{R}^n$ und gesucht sei die Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ von $Ax = b$.		
1.	Sei $\kappa(A)$ die Konditionszahl der Matrix A. Bei Störung der Eingabedaten A und b ist der relative Fehler in der Lösung maximal um einen Faktor $\kappa(A)$ größer als der relative Eingabefehler.	
2.	Sei A zusätzlich symmetrisch positiv definit. Für die Cholesky-Zerlegung $A = LDL^T$ gilt dann: $\det(L) = 1$ und $\det(D) > 0$.	
3.	Der Rechenaufwand der Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung zur Bestimmung der Lösung x ist etwa $\frac{4}{3}n^3$ Operationen.	
4.	Sei $\tilde{x}$ eine Annäherung von x und $\tilde{r} := b - A\tilde{x}$. Dann gilt: $\|\tilde{x} - x\| \leq \|A^{-1}\|\, \|\tilde{r}\|$.	