Numerische Mathematik I für Ingenieure SS11
Verständnisfragen – Hausübung 6

VF-1: Mit $A, L, R, P, D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ seien R bzw. L eine rechte obere bzw. normierte linke untere Dreiecksmatrix, P eine Permutationsmatrix und D eine Diagonalmatrix. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!		
1.	Ist A regulär, so existiert stets eine LR–Zerlegung mit Permutationsmatrix P, so dass $PA = LR$ gilt.	
2.	Ist A regulär, so existiert stets eine LR–Zerlegung mit Permutationsmatrix P und Diagonalmatrix D, so dass $PDA = LR$ gilt.	
3.	Aus $PDA = LR$ folgt, dass A genau dann positiv definit ist, wenn alle Diagonalelemente von D positiv sind.	
4.	Beschreibt die Diagonalmatrix D eine Zeilenäquilibrierung, so folgt aus $B := DA$ die Ungleichung $\kappa_B \geq \kappa_A$ für die Konditionszahlen von A und B bezüglich der $\|\cdot\|_\infty$-Norm.	

VF-2: Es seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch positiv definit, $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine normierte untere Dreiecksmatrix und $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Diagonalmatrix. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!		
1.	A hat nur positive Eigenwerte.	
2.	Das Cholesky-Verfahren zur Bestimmung der Zerlegung $A = LDL^T$ ist nur dann stabil, wenn man Pivotisierung benutzt.	
3.	Der Aufwand des Cholesky-Verfahrens zur Bestimmung der Zerlegung $A = LDL^T$ ist ca. $\frac{1}{3}n^3$ Operationen.	
4.	Es sei $A = LDL^T$. Dann gilt $d_{i,i} > 0 \ \forall i = 1, \ldots, n$, wobei $d_{i,i}$ die Diagonaleinträge der Matrix D sind.	

VF-3: Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine allgemeine, reguläre Matrix und x, y, $b \in \mathbb{R}^n$ mit $A\,x = b$. Weiter sei $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine reguläre, obere Dreiecksmatrix und $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische, positiv–definite Matrix. Die Zahl der benötigten Operationen (kurz "Ops") (nur Multiplikationen und Divisionen) benutzen wir gemäß Vorlesung / Buch. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!		
1.	Die Lösung von $L\,y = b$ benötigt $n^3 + \mathcal{O}(n^2)$ Ops	
2.	Die Lösung von $A\,x = b$ per Gaußelimination benötigt $\frac{n^3}{3} + \mathcal{O}(n^2)$ Ops	
3.	Die Lösung von $S\,x = b$ per Choleskyzerlegung benötigt $\frac{n^3}{3} + \mathcal{O}(n^2)$ Ops	
4.	Die Lösung von $S\,x = b$ per Choleskyzerlegung benötigt $\frac{n^3}{6} + \mathcal{O}(n^2)$ Ops	

VF-4: Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Die Abkürzung "spd" stehe für symmetrisch und positiv–definit. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!		
1.	A ist invertierbar und symmetrisch $\Longrightarrow A$ spd.	
2.	A ist nur dann spd, wenn A^{-1} ebenfalls spd isd	
3.	A symmetrisch und alle Diagonalelemente von A strikt positiv $\Longrightarrow A$ ist spd	
4.	A ist eine spd–Matrix genau dann, wenn es eine obere Dreiecksmatrix R mit strikt positiven Diagonalelementen und $A = R^T R$ gibt.	

VF-5: Mit $A, L, D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sei L eine normierte linke untere Dreiecksmatrix und D eine Diagonalmatrix. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!		
1.	Ist A regulär, so existiert stets eine LDL^T–Zerlegung mit $A = LDL^T$.	
2.	Ist A positiv definit und symmetrisch, so existiert stets eine LDL^T–Zerlegung mit $A = LDL^T$, wobei alle Diagonalelemente von D positiv sind.	
3.	Nur mithilfe einer zusätzlichen Pivotisierung kann man garantieren, dass beim Cholesky-Algorithmus keine Division durch Null auftritt.	
4.	Nur für positiv definite Matrizen A kann man mit dem Cholesky-Algorithmus eine Zerlegung $A = LDL^T$ finden.	