Numerische Mathematik I für Ingenieure SS11
Verständnisfragen – Hausübung 8

VF-1: Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $m \geq n$. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!		
1.	Der Aufwand zur Berechnung von $A^T A$ ist proportional zu $m^2\, n$.	
2.	Der Aufwand zur Berechnung von $A^T A$ ist proportional zu $n^2\, m$.	
3.	Der Aufwand zur Berechnung von $A^T A$ ist stets größer als der zum Lösen der Normalgleichungen.	
4.	Zur Lösung der Normalgleichungen verwendet man das Cholesky-Verfahren, weil das Vorwärts-/Rückwärtseinsetzen bei der $L\,D\,L^T$-Zerlegung ungefähr halb soviele Operationen ben"otigt wie das bei einer $L\,R$-Zerlegung.	

VF-2: Mit $m > n$ und $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ soll das lineare Ausgleichsproblem $\|Ax - b\|_2 \to \min\limits_{x\in\mathbb{R}^n}$ gelöst werden. Hierbei habe die Matrix A den Rang n, die Cholesky-Zerlegung $A^T A = LDL^T$ und die Lösung des Problems wird mit x^* bezeichnet. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!		
1.	Es gilt $L^T x^* = D^{-1} y$, wobei y die L"osung der Gleichung $Ly = b$ ist.	
2.	Die Normalgleichungen lassen sich immer mit Gauß-Elimination ohne Pivotisierung l"osen.	
3.	Wenn die Spalten von A orthonormal sind, dann ist x^* auch die Lösung von $\|x - A^T\, b\|_2 \to \min\limits_{x\in\mathbb{R}^n}$.	
4.	Es gilt stets $\|LDL^T x^* - A^T b\|_2 = 0$.	

VF-3: Mit $m > n$ und $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ soll das lineare Ausgleichsproblem $\|Ax - b\|_2 \to \min\limits_{x\in\mathbb{R}^n}$ gelöst werden. Hierbei habe die Matrix A den Rang n, und die Lösung des Problems wird mit x^* bezeichnet. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!		
1.	Wegen $\kappa_2(A^T A) = \kappa_2(A)^2$ sind die Normalgleichungen für die numerische Lösung des Ausgleichsproblems immer ungeeignet.	
2.	Die Normalgleichungen lassen sich mit dem Cholesky-Verfahren lösen, nicht aber mit Gauß-Elimination mit Pivotisierung.	
3.	Mit der Cholesky-Zerlegung $A^T A = LDL^T$ gilt stets $L^T x^* = D^{-1} y$, wobei y die Lösung der Gleichung $Ly = A^T b$ ist.	
4.	Es gilt stets $\|Ax^* - b\|_2 = \|LDL^T x^* - A^T b\|_2$.	

VF-4: Mit mit $m > n$ und $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ soll das lineare Ausgleichsproblem $\|Ax - b\|_2 \to \min_{x\in\mathbb{R}}$ gelöst werden. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!		
1.	Die Normalgleichungen tragen ihren Namen, weil das damit berechnete Residuum senkrecht auf b steht.	
2.	Wegen $\kappa_2(A^T A) = \kappa_2(A)^2$ sind die Normalgleichungen für die numerische Lösung großer Gleichungssysteme besonders geeignet.	
3.	Im Gegensatz zu Givens-Rotationen lässt sich mit Householder-Spiegelungen das Residuum $\|Ax - b\|_2$ nicht direkt aus dem transformierten System ablesen, sondern man muss erst $Ax - b$ explizit ausrechnen.	
4.	Bei der Verwendung einer QR-Transformation (Givens/Householder) muss die Matrix Q nicht explizit aufgestellt werden, um die Lösung x zu erhalten.	