Numerische Mathematik I für Ingenieure SS11
Verständnisfragen – Hausübung 10

VF-1: Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!

1.	Wenn $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$ sowie $f''(x) > 0$ für alle $x \in [a, b]$ gilt, dann existiert in [a, b] genau eine Nullstelle von f.	
2.	Wenn $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$ sowie $f''(x) > 0$ für alle $x \in [a, b]$ gilt, dann gilt zu dem Startwert $x_0 = a$ für alle Iterationswerte x_i des Newton-Verfahrens $x_i \geq a$.	
3.	Wenn $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$ sowie $f''(x) < 0$ für alle $x \in [a, b]$ gilt, dann bilden die Iterationswerte des Newton-Verfahrens zu $x_0 = b$ eine monoton fallende Folge.	
4.	Wenn $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$, dann konvergiert die Bisektion stets schneller als das Sekantenverfahren, da sie den Einschluss der Nullstelle garantiert.	

VF-2: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!

1.	Wenn $f(a) \geq 0$ und $f(b) \leq 0$ gilt, dann existiert in $[a, b]$ genau eine Nullstelle von f.	
2.	Wenn $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$ gilt, dann existiert in $[a, b]$ genau eine Nullstelle von f.	
3.	Wenn $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$ gilt und $f''(x) < 0$ f'ur alle $x \in [a, b]$ gilt, dann bilden die Iterationswerte des Newton-Verfahrens zu $x_0 = a$ eine monoton steigende Folge.	
4.	Wenn $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$ gilt und $f'(x) \neq 0$ f'ur alle $x \in [a, b]$ gilt, dann liefert das Newton-Verfahrens zum Startwert $x_0 = (a + b)/2$ die in $[a, b]$ eindeutige Nullstelle $f(x^*) = 0$.	

VF-3: x^* sei eine Nullstelle der Funktion $f(x) := \mathrm{e}^{-x} - 2$. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!

1.	f hat eine eindeutige Nullstelle $x^* \in \mathbb{R}$.	
2.	Das Newton-Verfahren, angewandt auf f, konvergiert für alle Startwerte $x_0 \in \mathbb{R}$.	
3.	Das Newton-Verfahren, angewandt auf f, konvergiert nur für Startwerte x_0, für die $\|x_0 - x^*\|$ hinreichend klein ist.	
4.	Mit $x_0 < x^*$ gilt für die mit der Newton-Methode berechnete Folge $(x_k)_{k \geq 0}$ auch $x_k < x^*$ für alle $k \geq 1$.	

VF-4: Mit $k \in \mathbb{N}$ und den Iterationswerten $x_k \in \mathbb{R}$ gelte $x^* = \lim_{k\to\infty} x_k$. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!

1.	Die Folge $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert mit mindestens der Ordnung $p > 1$ gegen x^*, wenn $c > 0$ und $k_0 \in \mathbb{N}$ existieren, so dass $\|x_{k+1} - x^*\| \leq c\|x_k - x^*\|^p$ für alle $k \geq k_0$ gilt.	
2.	Die Folge $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert mit mindestens der Ordnung $p = 1$ gegen x^*, wenn $c > 1$ und $k_0 \in \mathbb{N}$ existieren, so dass $\|x_{k+1} - x^*\| \leq c\|x_k - x^*\|$ für alle $k \geq k_0$ gilt.	
3.	Ein iteratives Verfahren hat die Konvergenzordnung $p > 1$, wenn sich die Anzahl gültiger Stellen asymptotisch (d. h. für $k \to \infty$) von Iterationsschritt zu Iterationsschritt um den Faktor p vergrößert.	
4.	Je größer die Konvergenzordnung p ist, desto kleiner ist das kleinste $k \in \mathbb{N}$ mit $x_k = x^*$.	

VF-5: Mit der stetig differenzierbaren Funktion $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und den Iterationswerten $x^k \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$, betrachten wir die Iterationsvorschrift $x^{k+1} := \Phi(x^k)$. Ferner sei E eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$, $x^0 \in E$ und $L \in [0, 1)$. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!

1.	Ist Φ selbstabbildend und kontraktiv in E, so ist $x^* = \lim_{k\to\infty} x^k$ äquivalent zu $\Phi(x^*) = x^* \in E$, egal ob E konvex ist oder nicht.	
2.	Ist die Teilmenge $E \subset \mathbb{R}^n$ konvex, mit $\Phi(E) \subset E$ sowie $\|\|\Phi'(x)\|\| \leq L \;\forall x \in E$ in einer beliebigen Operatornorm, so konvergiert die Folge $\{x^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ gegen den eindeutigen Fixpunkt $x^* \in E$.	
3.	Ist E konvex, so ist in einer beliebigen Operatornorm $\|\|\Phi'(x)\|\| \leq L \;\forall x \in E$ hinreichend für die Kontraktivität von Φ in E.	
4.	Φ ist kontraktiv in E, wenn in einer beliebigen Norm gilt $\|\|\Phi(x) - \Phi(y)\|\| \leq L\,\|\|x - y\|\| \;\forall x, y \in E$.	

VF-6: Es sei $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, und für $x^* \in \mathbb{R}$ gelte $\Phi(x^*) = x^*$ und $\|\Phi'(x^*)\| < 1$. Mit $x_0 \in \mathbb{R}$ wird die Fixpunktiteration $x_{k+1} := \Phi(x_k),\ k = 0, 1, 2, \ldots$ definiert. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!

1.	Die Fixpunktiteration konvergiert stets, wenn $\|x_0 - x^*\|$ hinreichend klein ist.	
2.	Die Konvergenzordnung der Fixpunktiteration kann größer als 2 sein.	
3.	Das Fixpunktverfahren lässt sich stets auch als Newton-Verfahren für ein entsprechendes Nullstellenproblem interpretieren.	
4.	Falls $\Phi'(x^*) = 0$ gilt, ist die Konvergenzordnung der Fixpunktiteration größer als 1.	