Numerische Mathematik I für Ingenieure SS11
Verständnisfragen – Hausübung 12

VF-1: Es sei $\Pi_n = \left\{ \sum_{j=0}^{n} a_j\, x^j \;\middle|\; a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \right\}$ der Raum der Polynome vom Grade (höchstens) n. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!

1.	$\left\{1,\, x,\, x^2, \ldots, x^n\right\}$ bildet eine Basis von Π_n.	
2.	$\left\{\alpha_0,\, \alpha_1 x,\, \alpha_2 x^2, \ldots, \alpha_n x^n\right\}$ bildet für beliebige, nicht verschwindende Koeffizienten $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ eine Basis von Π_n.	
3.	$\left\{1,\, x-\alpha_1,\, (x-\alpha_1)(x-\alpha_2),\, \ldots,\, \prod_{i=1}^{n}(x-\alpha_i)\right\}$ bildet für beliebige Koeffizienten $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ eine Basis von Π_n.	
4.	Der Raum Π_n hat die Dimension n.	

VF-2: Sei $P(f|x_0, \ldots, x_n)$ das Lagrange-Interpolationspolynom zu den Daten $f(x_i)$, $i = 0, \ldots, n$ mit den Stützstellen $a = x_0 < \ldots < x_n = b$ für $n \in \mathbb{N}$. Sei $e(x) := f(x) - P(f|x_0, \ldots, x_n)$, $x \in \mathbb{R}$ der Fehler im Intervall $I := [\min(a, x), \max(b, x)]$. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!

1.	$e(x_i) = 0$, $i = 0, \ldots, n$.	
2.	Für $f \in C^{n+1}(I)$ existiert ein $\xi \in I$, so dass $e(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)\, \frac{1}{(n+1)!}\, f^{(n+1)}(\xi)$.	
3.	Es sei $[c, d] \subsetneqq I$. Der Interpolationsfehler lässt sich dann für alle $x \in [c, d]$ wie folgt abschätzen: $\lvert e(x)\rvert \le \max_{z\in[c,d]} \lvert\prod_{i=0}^{n}(z - x_i)\rvert \max_{z\in[c,d]} \frac{\lvert f^{(n+1)}(z)\rvert}{(n+1)!}$.	
4.	Sei $f(x) = 1/(1 + x^2)$, $x \in [-5, 5]$. Für festes $n \in \mathbb{N}$ seien die Stützstellen $x_{j,n} = -5 + 10\, j/n$, $j = 0, \ldots, n$ gegeben. Dann gilt für den Fehler: $\lim_{n\to\infty} \max_{x\in[-5,5]} \lvert f(x) - P(f|x_0, \ldots, x_n)\rvert = 0$.	

VF-3: Es sei $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)$ das Interpolationspolynom zu den Daten $(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))$ mit $x_0 < \ldots < x_n$, und $x, x^* \in [x_0, x_n]$. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!

1.	$P(f \mid x_0, \ldots, x_n)$ kann man an der Stelle x^* effizient mit dem Neville-Aitken-Schema auswerten.	
2.	$P(f \mid x_0, \ldots, x_n)$ kann man effizient mit dem Neville-Aitken-Schema bestimmen.	
3.	$P(f \mid x_0, \ldots, x_n)$ lässt sich sowohl mit dem Newton-Schema als auch mittels der Lagrange-Fundamentalpolynome aufstellen.	
4.	Sowohl die Newton-Interpolation als auch das Neville-Aitken-Schema haben zur Auswertung von $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)(x)$ einen Aufwand von $\mathcal{O}\left(n^2\right)$	

VF-4: Sei $P(f|x_0, \ldots, x_n)$ das Lagrange-Interpolationspolynom zu den Daten $f(x_i)$, $i = 0, \ldots, n$ mit den Stützstellen $x_0 < \ldots < x_n$ für $n \in \mathbb{N}$. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!

1.	Seien l_{jn} die Lagrangeschen Fundamentalpoynome. Dann gilt für das Interpolationspolynom: $P(f|x_0, \ldots, x_n)(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j)\, l_{jn}(x)$, $x \in \mathbb{R}$.	
2.	$P(f|x_0, \ldots, x_n) = \sum_{j=0}^{n} a_j\, x^j$ ist immer ein Polynom vom Grad n mit $a_n \neq 0$.	
3.	Es existiert genau ein Polynom $p \in \Pi_n$ mit $p(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, \ldots, n$.	
4.	$P(f|x_0, \ldots, x_n)(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, \ldots, n$.	