Numerische Mathematik I für Ingenieure SS11
Verständnisfragen – Übung 13

VF-1: Gegeben seien die Daten $f(x_0),\ f(x_1),\ \dots,\ f(x_n)$ mit $x_0, \dots, x_n$ paarweise verschiedenen und $n \geq 3$, $a := \min\{x_0, \dots, x_n\}$, $b := \max\{x_0, \dots, x_n\}$ sowie $x \in \mathbb{R}$. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!		
1.	Das aus der Vorlesung bekannte Lagrange-Interpolationsproblem zu den Stützstellen $x_0, \dots, x_n$ ist stets eindeutig lösbar.	
2.	Für beliebiges $f \in C^n[a,b]$, gilt: $$\max_{x\in[a,b]} \lvert f(x) - P(f\vert x_0, \dots, x_n)(x)\rvert \leq \max_{x\in[a,b]} \left\lvert \prod_{j=0}^{n-1} (x - x_j) \right\rvert \max_{x\in[a,b]} \frac{\lvert f^{(n)}(x)\rvert}{n!}$$	
3.	Durch Erhöhung der Stützstellenzahl und der damit verbundenen Erhöhung des Polynomgrades erhält man beliebig gute Approximationen für die zu interpolierende Funktion (bezüglich der Norm $\lvert\lvert.\rvert\rvert_\infty$).	
4.	Für $g(x) := 2x^n - \pi x^2$ gilt: $g(x) = P(g\vert x_0, x_2, x_n)(x)$.	

VF-2: Es sei $\Pi_n = \left\{ \sum_{j=0}^n a_j x^j \vert a_0, ..., a_n \in \mathbb{R} \right\}$ der Raum der Polynome vom Grade (höchstens) n. Ferner sei $P(f \mid x_0, \dots, x_n)$ das Lagrange–Interpolationspolynom zu den Daten $(x_0, f(x_0)), \dots, (x_n, f(x_n))$.		
1.	Die Lagrange-Fundamentalpolynome $l_{jn}(x) = \frac{(x-x_0)...(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})...(x-x_n)}{(x_j-x_0)...(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})...(x_j-x_n)}$, $0 \leq j \leq n$ bilden eine Basis von Π_n.	
2.	Die Lagrange-Fundamentalpolynome zur Darstellung von $P(f \mid x_0, \dots, x_n)$ sind gerade so konstruiert, dass gilt: $l_{jn}(x_i) = \delta_{ji}, \quad i, j = 0, \dots, n$. (Hinweis: $\delta_{ij} = 0$ falls $i \neq j$, $\delta_{jj} = 1$)	
3.	$\{a_1 x, a_2 x^2, \dots, a_{n-1} x^{n-1}\}$ bildet für beliebige, nicht verschwindende Koeffizienten $a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ eine Basis von Π_n.	
4.	Für ein festes $\bar{x}$ ist die Auswertung von $P(f \mid x_0, \dots, x_n)(\bar{x})$ sowohl mittels Neville-Aitken-Schema als auch mittels Newton-Schema und anschließender Auswertung von der Ordnung $\mathcal{O}(n^2)$.	

VF-3: Es sei $P(f \mid x_0, \dots, x_n)$ das Lagrange–Interpolationspolynom zu den Daten $(x_0, f(x_0)), \dots, (x_n, f(x_n))$ mit $x_0 < \ldots < x_n$.		
1.	Die Bestimmung von $P(f \mid x_0, \dots, x_n)$ mit dem Newton-Schema und mittels eines linearen Gleichungssystems (Vandermonde-Matrix) führt zum gleichen Polynom $P(f \mid x_0, \dots, x_n)$.	
2.	Die Bestimmung von $P(f \mid x_0, \dots, x_n)$ mittels eines linearen Gleichungssystems (Vandermonde-Matrix) ist stets effizienter als die Verwendung des Newton-Schemas.	
3.	$P(f \mid x_0, \dots, x_n)$ kann mit Hilfe der Lagrange-Fundamentalpolynome bestimmt werden.	
4.	Falls es sich bei der Funktion f um ein Polynom vom Grad $\leq$ n handelt, dann gilt stets $f(x) = P(f \mid x_0, \dots, x_n)(x)$.	