Numerische Mathematik I für Ingenieure SS12
Verständnisfragen – Hausübung 5

VF-1: Es seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ beliebig aber regulär, $b \in \mathbb{R}^n$ und gesucht sei die Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ von $Ax = b$.		
1.	Sei $\kappa(A)$ die Konditionszahl der Matrix A. Bei Störung der Eingabedaten A und b ist der relative Fehler in der Lösung maximal um einen Faktor $\kappa(A)$ größer als der relative Eingabefehler.	
2.	Sei A zusätzlich symmetrisch positiv definit. Für die Cholesky-Zerlegung $A = LDL^T$ gilt dann: $\det(L) = 1$ und $\det(D) > 0$.	
3.	Der Rechenaufwand der Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung zur Bestimmung der Lösung x ist etwa $\frac{4}{3}n^3$ Operationen.	
4.	Sei $\tilde{x}$ eine Annäherung von x und $\tilde{r} := b - A\tilde{x}$. Dann gilt: $\|\tilde{x} - x\| \leq \|A^{-1}\| \, \|\tilde{r}\|$.	

VF-2: Es seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch positiv definit, $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine normierte untere Dreiecksmatrix und $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Diagonalmatrix. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!		
1.	A hat nur positive Eigenwerte.	
2.	Das Cholesky-Verfahren zur Bestimmung der Zerlegung $A = LDL^T$ ist nur dann stabil, wenn man Pivotisierung benutzt.	
3.	Der Aufwand des Cholesky-Verfahrens zur Bestimmung der Zerlegung $A = LDL^T$ ist ca. $\frac{1}{3}n^3$ Operationen.	
4.	Es sei $A = LDL^T$. Dann gilt $d_{i,i} > 0 \ \forall i = 1, \ldots, n$, wobei $d_{i,i}$ die Diagonaleinträge der Matrix D sind.	

VF-3: Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Die Abkürzung "spd" stehe für symmetrisch und positiv–definit. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!		
1.	A spd $\Longrightarrow A$ ist invertierbar	
2.	A spd $\Longrightarrow A^{-1}$ ist ebenfalls spd	
3.	A symmetrisch und alle Diagonalelemente von A strikt positiv $\Longrightarrow A$ ist spd	
4.	A ist eine spd–Matrix genau dann, wenn es eine obere Dreiecksmatrix R mit strikt positiven Diagonalelementen und $A = R^T R$ gibt.	

VF-4: Mit $A, L, D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sei L eine normierte linke untere Dreiecksmatrix und D eine Diagonalmatrix. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!		
1.	Ist A regulär, so existiert stets eine LDL^T–Zerlegung mit $A = LDL^T$.	
2.	Ist A positiv definit und symmetrisch, so existiert stets eine LDL^T–Zerlegung mit $A = LDL^T$, wobei alle Diagonalelemente von D positiv sind.	
3.	Nur mithilfe einer zusätzlichen Pivotisierung kann man garantieren, dass beim Cholesky-Algorithmus keine Division durch Null auftritt.	
4.	Nur für positiv definite Matrizen A kann man mit dem Cholesky-Algorithmus eine Zerlegung $A = LDL^T$ finden.	