Numerische Mathematik I für Ingenieure SS12
Verständnisfragen – Übung 9

VF-1: Es seien $m > n$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b, \tilde{b} \in \mathbb{R}^m$ und $x^* \in \mathbb{R}^n$ die Lösung des linearen Ausgleichproblems $\|A\,x^* - b\|_2 = \min_{x\in\mathbb{R}^n} \|A\,x - b\|_2$. Weiter sei $\Theta \in [0, \frac{\pi}{2})$ der Winkel zwischen $A\,x^*$ und b sowie $\tilde{x}$ die Lösung des gestörten Problems $\|A\,\tilde{x} - \tilde{b}\|_2 = \min_{x\in\mathbb{R}^n} \|A\,x - \tilde{b}\|_2$. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!		
1.	$\frac{\|\tilde{x} - x^*\|_2}{\|x^*\|_2} \leq \frac{\kappa_2(A)}{\sin\Theta} \frac{\|\tilde{b} - b\|_2}{\|b\|_2}$	
2.	$\frac{\|\tilde{x} - x^*\|_2}{\|x^*\|_2} \leq \frac{\kappa_2(A)}{\cos\Theta} \frac{\|\tilde{b} - b\|_2}{\|b\|_2}$	
3.	$\frac{\|\tilde{x} - x^*\|_2}{\|x^*\|_2} \leq \tan\Theta\; \kappa_2(A) \frac{\|\tilde{b} - b\|_2}{\|b\|_2}$	
4.	Je größer der Winkel Θ, desto schlechter ist das Problem konditioniert.	

VF-2: Es seien $m \gg n$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m$. Es soll die Lösung x^* des linearen Ausgleichproblems $\|A\,x^* - b\|_2 = \min_{x\in\mathbb{R}^n} \|A\,x - b\|_2$ bestimmt werden. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!		
1.	Der Aufwand bei Lösung mit Normalgleichungen beträgt etwa $\frac{1}{2}n^3$.	
2.	Der Aufwand bei Lösung mit Householder-Transformationen beträgt etwa mn^2.	
3.	Die Lösung mit Normalgleichungen ist stabiler als mit QR-Zerlegung.	
4.	Die Lösung mit Normalgleichungen ist schneller als mit QR-Zerlegung.	

VF-3: Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $m \geq n$. Sei $A = U\Sigma V^T$ eine Singulärwertzerlegung von A mit Singulärwerten $\sigma_1 \geq \ldots \geq \sigma_{n-1} > 0$ und $\sigma_n = 0$. Es seien u_i bzw. v_i die Spalten von U und V.		
1.	Der Kern von A wird durch v_n aufgespannt.	
2.	Die Pseudoinverse A^+ von A ist gegeben durch $A^+ = V\Sigma^T U^T$.	
3.	Es gilt $\|A^+\|_2 = \sigma_{n-1}^{-1}$.	
4.	Sei $A = QR$ eine QR-Zerlegung von A, dann haben A und R die selben Singulärwerte.	

VF-4: Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $m \geq n$. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!		
1.	Alle Eigenwerte von $A^T A$ sind größer als 0.	
2.	Wenn alle Spalten von A linear unabhängig sind, dann ist $A^T A$ symmetrisch positiv definit.	
3.	Wenn alle Zeilen von A linear unabhängig sind, dann ist AA^T symmetrisch positiv definit.	
4.	Wenn alle Zeilen von A linear unabhängig sind, dann ist AA^T invertierbar.	

VF-5: Es sei $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und x^* so, dass $\Phi(x^*) = x^*$ gilt. Für $x_0 \in \mathbb{R}^n$ wird die Fixpunktiteration $x_{k+1} = \Phi(x_k),\ k = 0, 1, 2, \ldots$ definiert. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!		
1.	Die Konvergenzordnung der Fixpunktiteration ist in der Regel 1 und maximal 2.	
2.	Falls $\|\Phi'(x^*)\|_2 < 1$ gilt, so konvergiert die Fixpunktiteration für alle Startwerte mit $\|x_0 - x^*\|_2$ hinreichend klein.	
3.	$\|\Phi'(x^*)\|_2 > 1$ ist hinreichend dafür, dass kein $x_0 \neq x^*$ mit $\lim_{k\to\infty} x_k = x^*$ existiert.	
4.	$\Phi(x) = 2\,e^{-x^2}$ hat genau einen Fixpunkt auf $\mathbb{R}$ und das Fixpunktverfahren $x_{k+1} = \Phi(x_k)$ konvergiert für jeden Startwert $x_0 \in \mathbb{R}$.	