1. Großübung

Normen/Vektornomen

1 Definition

Definition s. Folie 2.9

- (N1): Positivität, Definitheit
- (N2): absolute Homogenität
- (N3): Dreiecksungleichung

Dreiecksungleichung für reelle Zahlen:

$$|x+y| \leq |x| + |y|$$

Folie 2.12
$\rightarrow$ verschiedene Normen lassen sich gegenseitig abschätzen

2 Beispiele für Vektornormen

2.1 p-Normen:

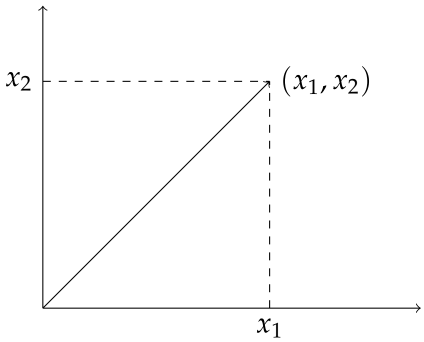
Allgemein:

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}},\ x \in \mathbb{R}^n,\ 1 \leq p < \infty$$

Euklidische Norm (2-Norm):

$$\|x\|_2 := (x^T x)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

z.B. $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\|\overrightarrow{x}\|_2 = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$



$\| \overrightarrow{x} \|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \rightarrow$ „Satz des Pythagoras"

2.2 Betragssummennorm (1-Norm):

$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

z.B. $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\| \overrightarrow{x} \|_1 = |1| + |2| + |3| = 6$

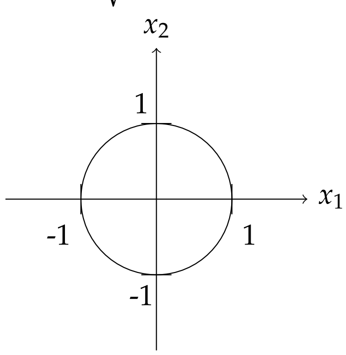
2.3 Maximumsnorm (∞-Norm):

$\|x\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |x_i|$

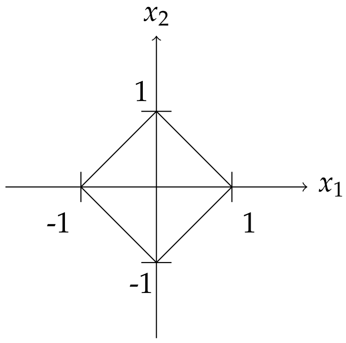
z.B. $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\| \overrightarrow{x} \|_\infty = \max\{|1|, |2|, |3|\} = 3$

2.4 Einheitssphären

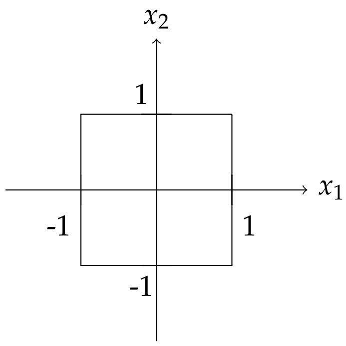
- $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$



- $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2|$



- $\|x\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|)$



3 Aufgabe (Auszug A2.18)

Welche der folgenden Abbildungen definieren Normen im $\mathbb{R}^2$?

$\boxed{x \to |x_1|}$

(N1) z.B. $x = \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}$, $\|x\| = |x_1| = |0| \not\Rightarrow x = \overrightarrow{0}$

$\to$ keine Norm

$\boxed{x \to 5\,|x_1| + 2\,|x_2|}$

(N1)

$\|x\| = 5\,|x_1| + 2\,|x_2| \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^2$ OK

$x = \overrightarrow{0} : 5\,|0| + 2\,|0| = 0,\ \Rightarrow x = \overrightarrow{0}$ OK

(N2)

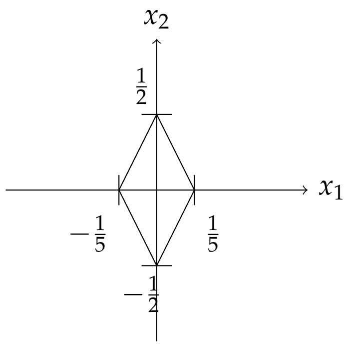
$\|ax\| = 5\,|ax_1| + 2\,|ax_2| = |a|\,,\ (5\,|x_1| + 2\,|x_2|) = |a| \cdot \|x\|$ OK

(N3)

$x, y \in \mathbb{R}^2$

$\|x + y\| = 5\,|x_1 + y_1| + 2\,|x_2 + y_2| \leq (5\,|x_1| + 2\,|x_2|) + (5\,|y_1| + 2\,|y_2|) = \|x\| + \|y\|$ OK

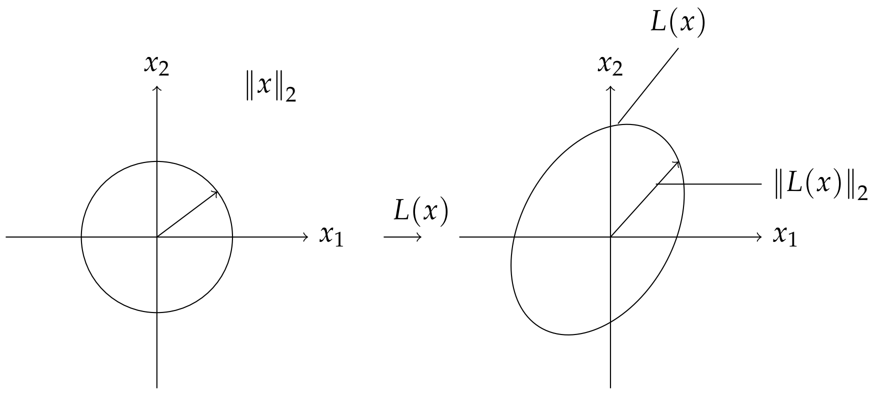
$\to$ Norm


x_2
$\frac{1}{2}$
x_1
$-\frac{1}{5}$
$\frac{1}{5}$
$-\frac{1}{2}$

Operatornormen/Matrixnormen

4 Definition Operatornorm

Definition s. Folie 2.24



5 hier: Matrixnormen

5.1 Beispiele für Matrixnormen:

Sei $X \in \mathbb{R}^n$, $Y \in \mathbb{R}^m$, $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine $(m \times n)$-Matrix. Stattet man X und Y mit der p-Norm für $1 \leq p \leq \infty$ aus, bezeichnet man die entsprechende Operatornorm kurz als $\|B\|_p := \|B\|_{X \to Y}$.

- Zeilensummennorm:
  $\|B\|_\infty = \max\limits_{i=1,\ldots,m} \sum\limits_{k=1}^{n} |b_{i,k}|$
  z.B. $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\|B\|_\infty = 5$

- Spaltensummennorm:
  $\|B\|_1 = \max\limits_{i=1,\ldots,n} \sum\limits_{k=1}^{m} |b_{k,i}|$
  z.B. $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\|B\|_1 = 4$

- 2-Norm(Spektralnorm):
  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)}$, $\lambda_{\max}$: größter Eigenwert
  $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A^T A = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -5 & 10 \end{pmatrix}$

Eigenwerte:

$$
\begin{aligned}
det \begin{pmatrix} 5-\lambda & -5 \\ -5 & 10-\lambda \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow & \qquad (5-\lambda)(10-\lambda) - 25 = 0 \\
\rightarrow & \quad \lambda_1 = \tfrac{1}{2}(15 - 5\sqrt{3})\,,\ \lambda_2 = \tfrac{1}{2}(15 + 5\sqrt{3}) \\
\rightarrow & \qquad \|A\|_2 = \sqrt{\tfrac{1}{2}(15 + 5\sqrt{3})}
\end{aligned}
$$

5.2 Eigenschaften von Matrixnormen mit $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$:

Submultiplikativität:

$$\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$$

Ferne gilt auch hier:

$$
\begin{aligned}
&\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0 \in \mathbb{R}^{n \times n} \\
&\|\lambda \cdot A\| = |\lambda| \cdot \|A\|\ ,\ \lambda \in \mathbb{R} \\
&\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|
\end{aligned}
$$

Landau-Symbol

6 Definition

Definition s. Folie 2.14, („="ist Kurzschreibweise)

$g(x) = \sigma(h(x))$
$x \to \infty$: „$g(x)$ wächst nicht wesentlich schneller als $h(x)$"
$x \to 0$: „$g(x)$ fällt nicht wesentlich schneller als $h(x)$"

7 Beispiel

$$g(x) = 3x^3 + 2x^2 + x + 4 = \sigma(\underbrace{x^3}_{h(x)}) \quad (x \to \infty)$$
$$x \in \mathbb{R},\ g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} \frac{\|g(x)\|}{\|h(x)\|} &= \lim_{x\to\infty} \left| \frac{3x^3 + 2x^2 + x + 4}{x^3} \right| \\ &= \lim_{x\to\infty} \left| 3 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^3} \right| \\ &= 3 \end{aligned}$$

$$\left|3x^3 + 2x^2 + x + 4\right| \leq 4\left|x^3\right| \ (x \to \infty)$$
$$\to g(x) = \sigma(x^3)$$

8 Beispiel:

$$g(x) = x^2 + 3x = \sigma(x) \quad (x \to 0)$$
$$x \in \mathbb{R},\ g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{\|g(x)\|}{\|h(x)\|} &= \lim_{x\to 0} \left| \frac{x^2 + 3x}{x} \right| \\ &= \lim_{x\to 0} |x + 3| \\ &= 3 \end{aligned}$$

$$\left|x^2 + 3x\right| < 4\left|x\right| \ (x \to 0)$$
$$\to g(x) = \sigma(x)$$

Taylorentwicklung

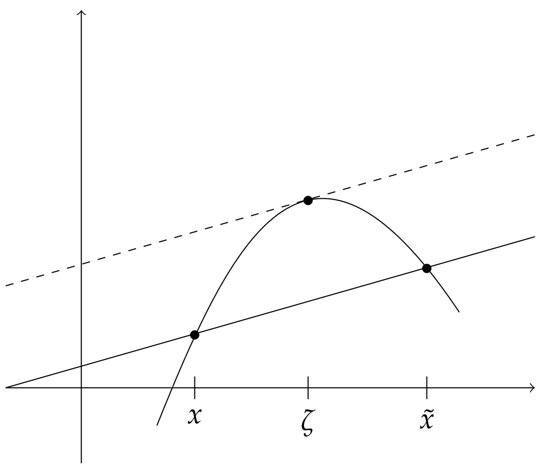
9 Definition

Definition s. Folie 2.16 f, s. Folie 2.17

$f(\tilde{x}) = p_{k-1}(\tilde{x}) + R_k(\tilde{x})$
Lagrange-Form des Restglieds:

$R_k(\tilde{x}) = \frac{f^{(k)}(\zeta)}{k!}(\tilde{x} - x)^k, \zeta \in (x, \tilde{x})$

<u>Skizze Mittelwertsatz:</u>



Schreibweise (Fall $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$)

$$\begin{aligned}
f\begin{pmatrix}\tilde{x}_1\\ \vdots \\ \tilde{x}_n\end{pmatrix} &= f\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix} \\
&+ \underbrace{\begin{pmatrix}\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x_1}\\ \vdots \\ \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x_n}\end{pmatrix}}_{\nabla f(x)} \begin{pmatrix}\tilde{x}_1 - x_1\\ \vdots \\ \tilde{x}_n - x_n\end{pmatrix} \\
&+ \frac{1}{2}(\tilde{x}_1 - x_1, \ldots, \tilde{x}_n - x_n) \underbrace{\begin{pmatrix}\frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_1} & \ldots & \frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_n}\\ \vdots & \ldots & \vdots \\ \frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x_n \mathrm{d}x_1} & \ldots & \frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x_n \mathrm{d}x_n}\end{pmatrix}}_{f''(x)\text{: Hesse-Matrix}} \begin{pmatrix}\tilde{x}_1 - x_1\\ \vdots \\ \tilde{x}_n - x_n\end{pmatrix} \\
&+ \sigma(\|\tilde{x} - x\|_2^3) \quad (\tilde{x} \to x)
\end{aligned}$$

Kondition eines Problems

10 Herleitung

Taylorentwicklung:

$$f(\tilde{x}) \doteq f(x) + (\tilde{x} - x)^T \nabla f(x) = f(x) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x_j}(x)(\tilde{x}_j - x_j)$$

$$\Rightarrow \underbrace{f(\tilde{x}) - f(x)}_{\text{abs. Fehler der Ausgabe}} \doteq \sum_{j=1}^{n} \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x_j} \underbrace{(\tilde{x}_j - x_j)}_{\text{abs. Fehler der Eingabe}}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)}}_{\text{rel. Fehler der Ausgabe}} \doteq \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \overbrace{\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x_j} \frac{x_j}{f(x)}}^{f_j(x)}}_{\text{Fehlervertärkung} \to \text{Größenordnung der Einzelableitungen}} \underbrace{\frac{\tilde{x}_j - x_j}{x_j}}_{rel. Fehler der Eingabe}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)} \right| \overset{(\cdot)}{\leq} \kappa_{rel}(x) \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\tilde{x}_j - x_j}{x_j} \right|$$

mit $\kappa_{rel}(x) = \max_j \left| f_j(x) \right|$

„Die Kondition beschreibt den <u>unvermeidbaren</u> Fehler bei exakter Rechnung.“