3. Großübung

Stabilität

1. Beispiel (A2.3)

$$f(p,q) = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \qquad (x^2 + px + q = 0)$$

$$p = -123, \quad q = 0.4 \qquad \text{(4-stellige GPA)}$$

$$p^2 = 15130, \qquad \frac{p^2}{4} = 3783, \qquad \frac{p^2}{4} - q = 3783,$$

$$\sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = 61.51, \qquad -\frac{p}{2} = 61.5,$$

$$-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = \begin{cases} x_1 = 123.0 \\ x_2 = -0.01 \quad \textit{Auslöschung!!!} \end{cases} \qquad exakt: \begin{cases} x_1 = 122.996 \\ x_2 = 3.25 \cdot 10^{-3} \end{cases}$$

1.1. Kondition:

$$\frac{\partial f}{\partial p} = -\frac{1}{2} \pm \frac{p}{\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}} \approx \pm 60$$

$$\frac{\partial f}{\partial q} = \pm \frac{-1}{2\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}} \approx \mp 0.008$$

1.2. Problem: Auslöschung

Ausweg: Satz von Vieta:

$$q = x_1 x_2, \;\; -p = x_1 + x_2$$

$$x_1 = 123.0 \text{ (Ergebnis von oben)}$$

$$x_2 = \frac{q}{x_1} = \frac{0.4}{123.0} = 3.252 \cdot 10^{-3}$$

hier: bessere Kondition bei Bestimmung von x_2 :

$$\frac{\partial(\frac{q}{x_1})}{x_1} = \frac{-q}{x_1^2}$$

$$\kappa_{rel} = \left| \frac{-q}{x_1^2} \frac{x_1}{\frac{q}{x_1}} \right| = -1$$

Kondition linearer Gleichungssysteme

2. Störung in b

$$A(x + \underbrace{\Delta x}_{\text{Störung}}) = b + \underbrace{\Delta b}_{\text{Störung}}$$

$$\overset{Ax=b}{\Rightarrow} A \cdot \Delta x = \Delta b \Rightarrow \Delta x = A^{-1}\Delta b$$

$$\Rightarrow \|\Delta x\| = \|A^{-1}\Delta b\| \leq \|A^{-1}\|\|\Delta b\|$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow r_x := \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} &\leq \frac{\|A^{-1}\|\|\Delta b\|}{\|x\|} = \frac{\|A^{-1}\|\|b\|}{\|x\|}\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \\ &= \frac{\|A^{-1}\|\|Ax\|}{\|x\|}\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \leq \frac{\|A^{-1}\|\|A\|\|x\|}{\|x\|}\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \\ &= \underbrace{\|A^{-1}\|\|A\|}_{=:\kappa(A)} \underbrace{\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}}_{=:r_b} \qquad \text{(wenn } A \text{ nicht gestört, d.h. } \Delta A = 0)\end{aligned}$$

3. Störung in A und b

$$\begin{aligned}\Rightarrow (A + \Delta A)(x + \Delta x) &= b + \Delta b \qquad (**) \\ \underline{\mathit{exakt:}} \quad Ax &= b \qquad (*)\end{aligned}$$

Subtrahiere (*) von (**) :

$$\begin{aligned}&\Delta Ax + A\Delta x + \Delta A\Delta x = \Delta b \\ \Leftrightarrow &\Delta x = A^{-1}(-\Delta Ax - \Delta A\Delta x + \Delta b) \\ &\quad = -A^{-1}\Delta Ax - A^{-1}\Delta A\Delta x + A^{-1}\Delta b \\ \Rightarrow &\|\Delta x\| = \| - A^{-1}\Delta Ax - A^{-1}\Delta A\Delta x + A^{-1}\Delta b\| \\ &\qquad \leq \|A^{-1}\Delta Ax\| + \|A^{-1}\Delta A\Delta x\| + \|A^{-1}\Delta b\| \\ &\qquad \leq \|A^{-1}\|\|\Delta A\|\|x\| + \|A^{-1}\|\|\Delta A\|\|\Delta x\| + \|A^{-1}\|\|\Delta b\| \\ \Leftrightarrow &\quad \underbrace{(1 - \|A^{-1}\|\|\Delta A\|)}_{\geq 0 \text{ ,falls } \|\Delta A\| \text{ genügend klein}} \quad \|\Delta x\| \leq \|A^{-1}\|\|\Delta A\|\|x\| + \|A^{-1}\|\|\Delta b\| \\ \Leftrightarrow &(1 - \|A^{-1}\|\|\Delta A\|)\|\Delta x\| \leq \|A^{-1}\|(\|\Delta A\|\|x\| + \|\Delta b\|) \\ &\qquad = \kappa(A)\left(\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}\|x\| + \frac{\|\Delta b\|}{\|A\|}\right) \\ &\left(\text{wegen } \|b\| = \|Ax\| \leq \|A\|\|b\|\right) \leq \kappa(A)\left(\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}\right)\|x\| \\ \Leftrightarrow &\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\kappa(A)}{1 - \kappa(A)\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}}\left(\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}\right) \\ &\left(1 - \kappa(A)\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \geq 0 \text{ prüfen (Klausur!)}\right)\end{aligned}$$

4. Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \tilde{A}^T = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ (nur für } 2 \times 2 \text{ Matrizen)}$$

$$\|A\|_1 = 6, \|A^{-1}\|_1 = \frac{7}{2} \Rightarrow \kappa_1(A) = 21$$
$$\|A\|_\infty = 7, \|A^{-1}\|_\infty = 3 \Rightarrow \kappa_\infty(A) = 21$$

Bem.: nur für 2×2-Matrizen gilt stets: $\kappa_1(A) = \kappa_\infty(A)$

$$\begin{aligned}
\|A\|_2 &= \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)} \\
B := A^T A &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 14 \\ 14 & 20 \end{pmatrix} \\
0 = \det(B - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 10 - \lambda & 14 \\ 14 & 20 - \lambda \end{vmatrix} = (10 - \lambda)(20 - \lambda) - 196 \\
&= 4 - 30\lambda + \lambda^2 \\
\Rightarrow \lambda_{1,2} &= 15 \pm \sqrt{225 - 4} = \begin{cases} 29.87 \\ 0.1339 \end{cases} \\
\Rightarrow \|A\|_2 &= \sqrt{\lambda_{\max}(B)} = \sqrt{29.87} = 5.465
\end{aligned}$$

4.1. Kondition $\kappa_2(A)$

Muss man zur Bestimmung von $\kappa_2(A)$ auch noch die Eigenwerte von $C = A^{-T} A^{-1}$ bestimmen?
$\rightarrow$ Nein, es gilt:

$$\kappa_2(A) := \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = \sqrt{\frac{\lambda_{\max(A^T A)}}{\lambda_{\max(A^T A)}}} \overset{A = A^T}{=} \frac{\lambda_{\max(A^T A)}}{\lambda_{\max(A^T A)}}$$

4.1.1. Beweis:

<u>allgemein:</u> $Bx = \lambda x \Rightarrow B^{-1} B x = B^{-1} \lambda x$

$$\Rightarrow Ix = B^{-1} \lambda x \Rightarrow B^{-1} x = \frac{1}{\lambda} x \qquad B \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \text{ reg.}$$

$$\underline{\text{hier:}} \qquad C := A^{-T}A^{-1} = \underbrace{AA^{-1}}_{I}A^{-T}A^{-1} = A(A^TA)^{-1}A^{-1}$$

$$= AB^{-1}A^{-1}(\text{Ähnlichkeitstransformation} \rightarrow \text{hat gleiche Eigenwerte wie } B^{-1})$$

$$\text{nämlich: } \frac{1}{\lambda(B)} = \frac{1}{\lambda(A^TA)}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\underbrace{\mu_{\max}(A^{-T}A^{-1})}_{\text{max. Ew von C}}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_{\min}(A^TA)}}$$

$$\Rightarrow \kappa_2(A) = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(A^TA)}{\lambda_{\min}(A^TA)}} = \sqrt{\frac{29.87}{0.1339}} = 14.93$$

5. Bemerkung:

wegen der Submultiplikativität der Operatornorm gilt stets:
$1 = \|I\| = \|AA^{-1}\| \leq \|A\|\|A^{-1}\| = \kappa(A)$

6. Bemerkung:

Kondition ist Eigenschaft des Problems.
Aber : Bei linearen Gleichungssystemen lässt sich ein Ersatzproblem finden.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix}, \hat{b} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{6}{7} \end{pmatrix}$$

gleiche Lösung x, aber anderes (besseres) Problem

$$\kappa_\infty(A) = 21$$

$$\|\hat{A}\|_\infty = 1$$

$$\tilde{A}^{-1} = \frac{1}{\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{7} - \frac{3}{7}\cdot\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} \frac{4}{7} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{3}{7} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 7 \\ \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \end{pmatrix}$$

$$\|\hat{A}^{-1}\|_\infty = 13$$

$$\Rightarrow \kappa_\infty(\hat{A}) = \|\hat{A}\|_\infty \|\hat{A}^{-1}\|_\infty = 13$$

Fehler in Vektoren und Matrizen:

7. Varianten:

- absolute Fehler; komponentenweise in einer, mehreren oder allen Komponenten.
  z.B. Vektor: $|\Delta x_k| \leq M$
  Matrix: $|\Delta a_{ij}| \leq M$

  Beispiel:

  Alle Komponenten von A und B sind mit einem absoluten Fehler von max. 0.01 behaftet:

$$
\begin{aligned}
&A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} \\
&\kappa_\infty(A) = 21, \quad \|A\|_\infty = 7, \quad \|b\|_\infty = 6 \\
&\|\Delta A\|_\infty \leq \left\| \begin{pmatrix} 0.01 & 0.01 \\ 0.01 & 0.01 \end{pmatrix} \right\|_\infty = 0.02 \\
&\|\Delta b\|_\infty \leq \left\| \begin{pmatrix} 0.01 \\ 0.01 \end{pmatrix} \right\|_\infty = 0.01 \\
&r_x = \frac{\|\Delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq \frac{\kappa_\infty(A)}{1 - \underbrace{\kappa_\infty(A)\frac{\|\Delta A\|_\infty}{\|A\|_\infty}}_{=0.06 \to OK}} \Big(\underbrace{\frac{\|\Delta A\|_\infty}{\|A\|_\infty}}_{r_A} + \underbrace{\frac{\|\Delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty}}_{r_b} \Big) \\
&\qquad \leq 22.34 \cdot (2.857 \cdot 10^{-3} + 1.667 \cdot 10^{-3}) \leq 0.1011
\end{aligned}
$$

- relativer Fehler; komponentenweise in einer, mehreren oder allen Komponenten.
  z.B. Vektor: $r_{x_k} := \left|\frac{\Delta x_k}{x_k}\right| \leq \varepsilon \Leftrightarrow |\Delta x_k| \leq \varepsilon |x_k|$
  Matrix: $r_{a_{ij}} := \left|\frac{\Delta a_{ij}}{a_{ij}}\right| \leq \varepsilon \Leftrightarrow |\Delta a_{ij}| \leq \varepsilon |a_{ij}|$

  Beispiel:

  Jede Komponente von A und B sei mit einem rel. Messfehler von $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-4}$ behaftet:

$$
\begin{aligned}
r_\infty(b) &:= \frac{\|\Delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty} \left(\leq \frac{\left\| \begin{pmatrix} \varepsilon \cdot 5 \\ \varepsilon \cdot 6 \end{pmatrix} \right\|_\infty}{\left\| \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} \right\|_\infty} \right) = \frac{\max_i |\Delta b_i|}{\max_j |b_j|} \\
&\leq \frac{\max_i (\varepsilon \cdot |b_i|)}{\max_j |b_j|} = \varepsilon \cdot \frac{\max_i |b_i|}{\max_j |b_j|} = \varepsilon = 2 \cdot 10^{-4} \\
r_\infty(A) &= \frac{\|\Delta A\|_\infty}{\|A\|_\infty} = \frac{\max\limits_{i=1,\dots,m} \sum_{k=1}^n |\Delta A_{ik}|}{\max\limits_{i=1,\dots,m} \sum_{k=1}^n |A_{ik}|} \leq \frac{\max\limits_{i=1,\dots,m} \sum_{k=1}^n \varepsilon \cdot |A_{ik}|}{\max\limits_{i=1,\dots,m} \sum_{k=1}^n |A_{ik}|} \\
&= \varepsilon \cdot \frac{\max\limits_{i=1,\dots,m} \sum_{k=1}^n |A_{ik}|}{\max\limits_{i=1,\dots,m} \sum_{k=1}^n |A_{ik}|} = \varepsilon = 2 \cdot 10^{-4} \\
\Rightarrow r_x &\leq \frac{\kappa_\infty(A)}{1 - \underbrace{\kappa_\infty(A) r_\infty(A)}_{4.2 \cdot 10^{-3} > 0 \to OK}} \Big(r_\infty(A) + r_\infty(b) \Big) = 8.44 \cdot 10^{-3}
\end{aligned}
$$