4. Großübung

Lösung linearer Gleichungssysteme

gesucht: Lösung $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= -5 \\ 6x_1 - 3x_2 - 7x - 2x_4 &= 5 \\ 4x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 5x_4 &= 13 \\ 8x_1 + 2x_2 + 12x_3 + 2x_4 &= -8 \end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ -6 & -3 & -7 & -2 \\ 4 & 4 & 5 & -5 \\ 8 & 2 & 12 & 2 \end{pmatrix}}_{=A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}}_{=x} = \underbrace{\begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 13 \\ -8 \end{pmatrix}}_{=b} \Longleftrightarrow A \cdot x = b$$

$A \in \mathbb{R}^{n \times n},\ x \in \mathbb{R}^n,\ b \in \mathbb{R}^n$
A regulär : $det(A) \neq 0 \Leftrightarrow rang(A) = n$
Rang: Maximale Anzahl linear unabhäniger Spalten bzw. Zeilen.

Gauß-Elimination:

$\rightarrow$ Erzeuge rechte obere Dreiecksmatrix, dann Rückwärtseinsetzen

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & 2 & -5 \\ -6 & -3 & -7 & -2 & 5 \\ 4 & 4 & 5 & -5 & 13 \\ 8 & 2 & 12 & 2 & -8 \end{array}\right) \leftarrow I$$

$$\begin{array}{r} \\ -l_{2,1} \cdot I \rightarrow \\ -l_{3,1} \cdot I \rightarrow \\ -l_{4,1} \cdot I \rightarrow \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & 2 & -5 \\ 0 & -6 & 2 & 4 & -10 \\ 0 & 6 & -1 & -9 & 23 \\ 0 & 6 & 0 & -6 & 12 \end{array}\right) \leftarrow II$$

$$
\begin{aligned}
l_{2,1} &= \frac{a_{2,1}}{a_{1,1}} = \frac{-6}{2} = -3 \\
l_{3,1} &= \frac{a_{3,1}}{a_{1,1}} = \frac{4}{2} = 2 \\
l_{4,1} &= \frac{a_{4,1}}{a_{1,1}} = \frac{8}{2} = 4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{r}
\\
\\
-l_{3,2} \cdot II \rightarrow \\
-l_{4,2} \cdot II \rightarrow
\end{array}
\left(\begin{array}{cccc|c}
2 & -1 & 3 & 2 & -5 \\
0 & -6 & 2 & 4 & -10 \\
0 & 0 & 1 & -5 & 13 \\
0 & 0 & 2 & -2 & 2
\end{array}\right)
\leftarrow III
$$

$$
\begin{aligned}
l_{3,2} &= \frac{a_{3,2}}{a_{2,2}} = \frac{6}{-6} = -1 \\
l_{4,2} &= \frac{a_{4,2}}{a_{2,2}} = \frac{6}{-6} = -1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{r}
\\
\\
\\
-l_{4,3} \cdot III \rightarrow
\end{array}
\left(\begin{array}{cccc|c}
2 & -1 & 3 & 2 & -5 \\
0 & -6 & 2 & 4 & -10 \\
0 & 0 & 1 & -5 & 13 \\
0 & 0 & 0 & 8 & -24
\end{array}\right)
$$

$$
l_{4,3} = \frac{a_{4,3}}{a_{3,3}} = \frac{2}{1} = 2
$$

<u>Lösung durch Rückwärtseinsetzen:</u>

$$
\begin{aligned}
x_4 &= \frac{-24}{8} = -3 \\
x_3 &= \frac{13 - (-5x_4)}{1} = -2 \\
x_2 &= \frac{-10 - (4x_4 + 2x_3)}{-6} = -1 \\
x_1 &= \frac{-5 - (2x_4 + 3x_3 - x_2)}{2} = 3
\end{aligned}
$$

Mögliche Variante:

Andere rechte Seite, aber gleiche Matrix:

$$
Ax = b\ , b = \begin{pmatrix} -11 \\ 3 \\ 16 \\ -14 \end{pmatrix}
$$

$\Rightarrow$ Eine Wiederholung der Gauß-Elimination wäre, abgesehen von der rechten Seite, die selbe Rechnung.

$\Rightarrow$ Stattdessen: Verwende die schon vorhandene Zerlegung $A = LR$ mit:

$$L := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ R := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -6 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

LR-Zerlegung

Die hier beschriebene Gauß-Elimination bewirkt ,sofern durchführbar, eine Faktorisierung der Matrix A mit $A = LR$

- L ist eine normierte untere Dreiecksmatrix

$$L = (l_{i,j})_{i,j=1}^{n}\ mit$$

$$l_{i,i} = 1,\ i = 1, .., n$$

- R ist eine obere Dreiecksmatrix

Die Lösung von $Ax = b$ ergibt sich über die Lösung zweier Dreickssysteme:

$$\begin{aligned} Ax = b \Leftrightarrow & L\underbrace{Rx}_{y} = b \\ \Leftrightarrow & Ly = b \text{ (Vorwärtseinsetzen)} \\ & Rx = y \text{ (Rückwärtseinsetzen)} \end{aligned}$$

$\underline{Ly = b}$ Vorwärtseinsetzen

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -11 \\ -3 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 16 \\ 4 & -1 & 2 & 1 & -14 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow y_1 = -11 \\ &\Rightarrow y_2 = 3 - (-3y_1) = -30 \\ &\Rightarrow y_3 = 16 - (2y_1 - y_2) = 8 \\ &\Rightarrow y_4 = -14 - (4y_1 - y_2 + 2y_3) = -16 \end{aligned}$$

$\underline{Rx = y}$ Rückwärtseinsetzen

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & 2 & -11 \\ 0 & -6 & 2 & 4 & -30 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & -16 \end{array}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow x_4 = -2\\
&\Rightarrow x_3 = \frac{8-(-5x_4)}{1} = -2\\
&\Rightarrow x_2 = \frac{-30-(4x_4+2x_3)}{-6} = 3\\
&\Rightarrow x_1 = \frac{-11-(2x_4+3x_3-x_2)}{2} = 1\\
&\Rightarrow x = \begin{pmatrix} 1\\ 3\\ -2\\ -2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Fazit

LR-Zerlegung = 'Gauß-Elimination ohne rechte Seite'.

Im Vergleich zur Gauß-Elimination entsteht kein Zusatzaufwand, da nur die $l_{i,j}$ behalten werden müssen. Das Verfahren ist sehr effizient bei mehreren rechten Seiten, die am Anfang noch nicht alle bekannt sind. Beispiel hierfür ist das (vereinfachtes) Newton-Verfahen.

Zeilenäquilibrierung (Skalierung) und Spaltenpivotisierung

- Problem $\rightarrow$ Kondition $\underset{\text{Ersatzproblem}}{\overset{\text{verbessert durch}}{\leftarrow}}$ Zeilenäquilibrierung
- Algorithmus $\rightarrow$ Stabilität $\leftarrow$ Spaltenpivotisierung

Pivotisierung

Problem : $a_{j,j} \approx 0$

$$
\left(\begin{array}{cc|c} 10^{-6} & 1 & 1\\ 2 & 3 & 5 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 10^{-6} & 1 & 1\\ \frac{2}{10^{-6}} & 3-\frac{2}{10^{-6}} & 5-\frac{2}{10^{-6}} \end{array}\right)
$$

z.B. $m = 5$ Stellen
$\Rightarrow x_2 = 1,\ x_1 = 0$ aber exakt gerechnet erhalten wir: $x_2 = 1 - 10^{-6},\ x_1 = 1 + 1.5 \cdot 10^{-6}$
$\Rightarrow \frac{\triangle x_1}{x}$ ist sehr groß
$\Rightarrow$ Algorithmus ist instabil.

Vertausche Zeilen:

$$
\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 5\\ 10^{-6} & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 5\\ \frac{10^{-6}}{2} & 1-\frac{10^{-6}}{2}\cdot 3 & 1-\frac{10^{-6}}{2}\cdot 5 \end{array}\right)
$$

z.B. $m = 5$ Stellen
$\Rightarrow x_2 = 1,\ x_1 = 1 \Rightarrow$ Fehler im Bereich 10^{-6}.

Bemerkung Praxis

Pivotisierung und Zeilenäquilibrierung immer zusammen anwenden! (um 'wahre' Pivotelemente zu finden). Statt $LR = A$ zerlege $LR = PD_zA$ und löse

$$LRx = PD_zb$$

- Optimale Kondition des Problems
- Stabiler Algorithmus (zudem: keine Probleme mit Nulleinträgen)

Berechnung Determinante

$$det(A) = det(D_z^{-1}P^{-1}LR) = \underbrace{det(D_z^{-1})}_{=\prod_{i=1}^n d_{i,i}^{-1}} \underbrace{det(P^{-1})}_{=(-1)^{\#\text{Vertauschungen}}} \underbrace{det(L)}_{=1} \underbrace{det(R)}_{=\prod_{i=1}^n r_{i,i}}$$

Beispiel: Klausuraufgabe A1, H2010

Die Musterlösung dieser Aufgabe befindet kann von der NumaMB Webseite heruntergeladen werden.