5. Großübung

Übergang Gauß-Elimination $\rightarrow LDL^T$

Der Gauß-Doolittle Algorithmus wird in den Unterlagen der Kleingruppenübungen behandelt.

Cholesky-Zerlegung

Definition

Folie 3.51: Definition symmetrisch positiv definit
Folie 3.54: Definition LDL^T-Zerlegung

$$A \text{ spd} \Leftrightarrow A = LDL^T \text{ (eindeutig) mit } d_{j,j} > 0 \ \forall i = 1, ..., n$$

Berechnung von LDL^T: s. Folie 3.57
Zur Veranschaulichung alternativ: 'Merkhilfen' beim Rechnen per Hand

Lösen von $Ax = b$

1. Variante

$$\begin{aligned} Ax &= LD\underbrace{L^Tx}_{=:z} = LDz = b \\ \Leftrightarrow i) \quad & \underbrace{LDz}_{\mathcal{O}(n^2) \text{ ungünstig!}} \quad = b \rightsquigarrow z \\ \Leftrightarrow ii) & L^Tx = z \rightsquigarrow x \end{aligned}$$

2. Variante (besser!)

$$\begin{aligned} Ax &= L\underbrace{DL^Tx}_{=:y} = Ly = b \\ \Leftrightarrow i) \ & \underbrace{Ly}_{\mathcal{O}(n)} = b \rightsquigarrow y \\ \Leftrightarrow ii) & DL^Tx = y \Leftrightarrow L^Tx = D^{-1}y \rightsquigarrow x \end{aligned}$$

Also:

$$\begin{aligned}
&i)\ A = LDL^T \\
&ii)\ Ly = b \\
&iii)\ L^T x = D^{-1} y
\end{aligned}$$

Vorteile Cholesky-Zerlegung

- Aufwand: $\frac{1}{6}n^3$ bei optimaler Implementierung
  (nur halb so groß wie LR: $\frac{1}{3}n^3$)

- keine Pivotisierung notwendig, da $d_{k,k} > 0$ ohnehin erfüllt

Berechnung Determinante von A

$$det(A) = det(LDL^T) = \underbrace{det(L)}_{=1} det(D) \underbrace{det(L^T)}_{=1} = det(D) = \prod_{i=1}^{n} d_{i,i}$$

Beispiel: $A = LDL^T$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -8 \\ 6 & 19 & -22 \\ -8 & -22 & 39 \end{pmatrix}$$

<u>Merkhilfe:</u>

$$\begin{aligned}
A = LDL^T &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{2,1} & 1 & 0 \\ l_{3,1} & l_{3,2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & d_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & d_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l_{2,1} & l_{3,1} \\ 0 & 1 & l_{3,2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} d_{1,1} & 0 & 0 \\ l_{2,1} \cdot d_{1,1} & d_{2,2} & 0 \\ l_{3,1} \cdot d_{1,1} & l_{3,2} \cdot d_{2,2} & d_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l_{2,1} & l_{3,1} \\ 0 & 1 & l_{3,2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Spaltenweise inklusive D berechnen:

1.Spalte:

$$\begin{aligned}
(1,1)\ :&d_{1,1} = 2 = a_{1,1}\\
(2,1)\ :&l_{2,1} \cdot d_{1,1} = a_{2,1} = 6 \Rightarrow l_{2,1} = \frac{a_{2,1}}{d_{1,1}} = \frac{6}{2} = 3\\
(3,1)\ :&l_{3,1} \cdot d_{1,1} = a_{3,1} = -8 \Rightarrow l_{3,1} = \frac{a_{3,1}}{d_{1,1}} = \frac{-8}{2} = -4
\end{aligned}$$

2.Spalte:

$$\begin{aligned}
(2,2)\ :&l_{2,1}^2 \cdot d_{1,1} + d_{2,2} = a_{2,2} = 19 \Rightarrow d_{2,2} = a_{2,2} - l_{2,1}^2 \cdot d_{1,1} = 19 - 3^2 \cdot 2 = 1\\
(3,2)\ :&l_{3,1} \cdot d_{1,1} \cdot l_{2,1} + l_{3,1} \cdot d_{2,2} = a_{3,2} = -22 \Rightarrow l_{3,2} = \frac{a_{3,2} - l_{3,1} \cdot d_{1,1} \cdot l_{2,1}}{d_{2,2}} = \frac{-22 - (-4) \cdot 2 \cdot 3}{1} = 2
\end{aligned}$$

3.Spalte:

$$\begin{aligned}
(3,3)\ :&l_{3,1}^2 \cdot d_{1,1} + l_{3,2}^2 \cdot d_{2,2} + d_{3,3} = a_{3,3} = 39\\
\Rightarrow &d_{3,3} = a_{3,3} - l_{3,1}^2 \cdot d_{1,1} - l_{3,2}^2 \cdot d_{2,2} = 39 - (-4)^2 \cdot 2 - 2^2 \cdot 1 = 3
\end{aligned}$$

Daraus folgt dann:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 3 & 1 & 0\\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$L^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Beispiel: $Ax = b$

Löse $Ax = b$ mit $b = \begin{pmatrix} -10\\ -29\\ 45 \end{pmatrix}$

$Ly = b$

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 3 & 1 & 0\\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} -10\\ -29\\ 45 \end{pmatrix}\\
\Rightarrow &y_1 = -10,\\
\Rightarrow &y_2 = -29 - 3 \cdot (-10) = 1,\\
\Rightarrow &y_3 = 45 - (-4) \cdot (-10) - 2 \cdot 1 = 3
\end{aligned}$$

$L^T x = D^{-1} y$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -10 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x_1 = -5 - (-4) \cdot 1 - 3 \cdot (-1) = 2,$$
$$\Rightarrow x_2 = 1 - 2 \cdot 1 = -1,$$
$$\Rightarrow x_3 = 1$$

Beispiel: Determinante

$$det(A) = det(D) = 2 \cdot 1 \cdot 3 = 6$$

Überprüfung $A\ spd$

Eigenschaften von A spd: siehe Folie 3.53

<u>Prüfe:</u>

- A symmetrisch?
- A pos. definit?
  Ja, wenn Cholesky durchführbar und $d_{j,j}$>0 für $j = 1, .., n$. aber: aufwendig, prüfe daher zunächst:
  - $a_{k,k} > 0\ \forall k\ \ \vec{e}_k^T A \vec{e}_k > 0$?
  - liegt der betragsmäßig größte Matrixeintrag auf der Hauptdiagonalen?
  - $a_{k,k} + a_{j,j} > 2|a_{k,j}|,\ j \neq k\ (\vec{e}_k \pm \vec{e}_j)^T A (\vec{e}_k \pm \vec{e}_j) > 0$?

Falls diese Kritieren zutreffen, prüfe spd mit Cholesky, ansonsten ist A nicht spd.