9. Großübung

Iterative Lösungsverfahren für nichtlineare Gleichungen/Systeme

1 Problem:

Gesucht sind alle Nullstellen x^* einer Funktion
$\rightarrow$ Iterative Lösung bis absoluter Fehler $\|x_k - x^*\| \leq \varepsilon$, d.h. es wird solange iteriert, bis die gewünschte Genauigkeit erzielt wird.

Es existieren verschiedene Verfahren, z.B. :

2 Fixpunktiteration:

2.1 Idee:

$$f(x^*) = 0 \text{ umformen in } x^* = \Phi(x^*)$$

$\rightarrow$ es existieren verschiedene Möglichkeiten $\Phi(x)$ zu wählen.

Mögliche Form:
$f(x^*) = 0$ und $g(x) \neq 0$ in Umgebung von x^*.

$$\Phi(x) = x + \underbrace{g(x)}_{\text{mit o.g. Einschränkungen bel. wählbar}} f(x)$$

$\rightarrow g(x^*)f(x^*) = g(x^*) \cdot 0 = 0$

$\Rightarrow x + g(x)f(x) = x = \Phi(x)$

2.2 Iteration:

$x_{k+1} = \Phi(x_k)$

2.3 Anschauliche Darstellung der Konvergenz im skalaren Fall:

$$|\Phi'(x)| < 1 \leftarrow \text{anziehend}$$
$$|\Phi'(x)| > 1 \leftarrow \text{abstoßend}$$

2.4 Wie prüft man Konvergenz:

1. Methode: Banachscher Fixpunktsatz (Folie 5.14)
   → kann immer zum Prüfen verwendet werden, aber in der Praxis oft schwer durchführbar

2. Methode Folgerung 5.11 (Folie 5.17) bzw. Folgerung 5.10 (Folie 5.16)
   - hinreichendes Kriterium
     d.h. wenn erfüllt liegt Konvergenz vor, aber wenn nicht erfüllt, ist keine Aussage möglich, ob Konvergenz vorliegt
   - in der Praxis leicht zu prüfen

2.4.1 Banachscher Fixpunktsatz:

X sei linear normierter Raum mit Norm $\|\cdot\|$

(a) $E \subseteq X$ vollständige Teilmenge von X

(b) Φ Selbstabbildung $\quad \Phi : E \to E$

(c) Φ ist kontraktiv auf E

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq L \cdot \|x - y\| \text{ für alle } x, y \in E \text{ mit } \underline{L < 1}$$

Bem.: Φ muss nicht differenzierbar sein. E muss nicht konvex sein.

<u>Dann gilt:</u>

(1) Es ex. genau ein Fixpunkt x^* von Φ in E.

(2) Für bel. $x_0 \in E$ konvergiert

$$x_{k+1} = \Phi(x_k) \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

gegen den Fixpunkt x^*.

2.4.2 Folgerung 5.11: Hinreichende Bedingungen für Konvergenz

(a) $E \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen.

(b) Φ Selbstabbildung: $\Phi : E \to E$

(c) E ist konvex. (skalar: $\mathbb{R}$ ist stets konvex) Φ stetig differenzierbar auf E und es gilt:

$$\max_{x \in E} \|\Phi'(x)\| = L < 1$$

$\Rightarrow$ Konvergenz gegen den eindeutigen Fixpunkt $x^* \in E$

Beweis (im skalaren Fall:)

Nach dem Mittelwertsatz gilt:

$$|\Phi(x) - \Phi(y)| = |\Phi'(\xi)(x-y)| \leq \max_{\xi \in [a,b]} |\Phi'(\xi)||x-y| = L|x-y|$$

$$\text{Mittelwertsatz:} \frac{\Phi(x) - \Phi(y)}{x-y} = \Phi'(\xi)$$

Bem.: für eine Funktion $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist $\Phi'(x)$ die Jacobi-Matrix:

$$\Phi'(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \Phi_1(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial \Phi_n(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \Phi_n(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

2.4.3 Fehlerabschätzung (Abbruchkriterium):

a-priori:

$$\|x_k - x^*\| \leq \frac{L^k}{1-L} \|x_1 - x_0\| \text{ (1. Iterierte und Startwert bzgl. bel. Norm)}$$

$$\|x_k - x^*\| \leq \frac{L^k}{1-L} \|x_1 - x_0\| \overset{!}{\leq} \varepsilon \text{ (zulässiger Fehler)}$$

$$\Leftarrow L^k \leq \frac{\varepsilon(1-L)}{\|x_1 - x_0\|}$$

$$\Leftarrow k \cdot \ln(L) \leq \ln\left(\frac{\varepsilon(1-L)}{\|x_1 - x_0\|}\right)$$

$$\Leftarrow k \geq \frac{\ln\left(\frac{\varepsilon(1-L)}{\|x_1 - x_0\|}\right)}{\ln(L)} \text{ (k aufrunden auf ganzzahligen Wert)}$$

a-posteriori:

$$\|x_k - x^*\| \leq \frac{L}{1-L} \|x_k - x_{k-1}\| \text{ (die letzten beiden Iterierten)}$$

2.4.4 Konvergenzordnung im skalaren Fall:

Fixpunktiteration hat die Konvergenzordnung $p = 1$ (Normalfall), wenn $0 \neq \|\Phi'(x^*)\| < 1$ gilt.
$p = 2: \quad \Phi'(x^*) = 0, \Phi''(x^*) \neq 0$
$p = 3: \quad \Phi'(x^*) = 0, \Phi''(x^*) = 0, \Phi'''(x^*) \neq 0$
allgemein für Konvergenzordnung p: $\Phi^{(1)}(x^*) = \ldots = \Phi^{(p-1)}(x^*) = 0, \Phi^{(p)}(x^*) \neq 0$

2.4.5 Eigenschaften Fixpunktiterationen:

\+ keine Ableitung notwendig
\+ verlässlich
− im Normalfall: Konvergenzordnung $p = 1$
\+ auch für Gleichungssysteme

3 Beispiel Fixpunktiteration:

gesucht: Näherungslösung des nichtlinearen Systems:

$$f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}y+\cos(\frac{x+y}{2})-5x\\x+\sin(\frac{x+y}{2})-10y\end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \text{ im Intervall } [0,1]\times[0,1]$$

Rechnung:

1. Forme $f(x,y)$ um in Fixpunktgleichung:

$$\Phi\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{y}{5}+\frac{1}{5}\cos(\frac{x+y}{2})\\\frac{x}{10}+\frac{1}{10}\sin(\frac{x+y}{2})\end{pmatrix}$$

2. Prüfe hinr. Bed. für Konvergenz:
   (a) $E := [0,1]^2$ ist abgeschlossen. (✓)
   (b) Selbstabbildung

   einfache Methode:
   $\Phi\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ komponentenweise abschätzen.

   Aufwendiger, aber je nach Fkt. evtl. erforderlich:
   $\Phi\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ auf Extrema untersuchen. Falls möglich Monotonie nutzen.

   Hier: Komponenten werden einzeln abgeschätzt:

$$0 = (\frac{0}{5}+\frac{1}{5}\cdot 0) \le \Phi_1(x,y) \le (\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\cdot 1) = \frac{2}{5} \qquad \forall x,y\in E$$
$$0 = (\frac{0}{10}+\frac{1}{10}\cdot 0) \le \Phi_2(x,y) \le (\frac{1}{10}+\frac{1}{10}\cdot 1) = \frac{2}{10} \qquad \forall x,y\in E$$

   insgesamt:
   $\Rightarrow \Phi(E) \subseteq [0,0.4]\times[0,0.2] =: \tilde{E} \subseteq E$

   $\Rightarrow$ Selbstabbildung (✓)

   (hier kann ein neues Intervall für Kontraktivität gewählt werden. Je nach Aufgabe ist evtl. nur $\tilde{E}$ zum Zeigen der Kontraktivität geeignet.)

   (c) Kontraktivität:
   E ist konvex.

$$\Phi'(x,y) = \begin{pmatrix}-\frac{1}{10}\sin(\frac{x+y}{2}) & \frac{1}{5}-\frac{1}{10}\sin(\frac{x+y}{2})\\\frac{1}{10}+\frac{1}{20}\cos(\frac{x+y}{2}) & \frac{1}{20}\cos(\frac{x+y}{2})\end{pmatrix}$$

einfache Methode:

alle Einträge einzeln abschätzen, dann Norm bilden.

Aufwendiger, aber je nach Fkt. evtl. erforderlich:

erst Norm bilden, dann abschätzen
$\rightarrow$ kleines L $\rightarrow$ weniger Schritte bei a-priori Abschätzung

Hier: Beträge alle Einträge werden einzeln abgeschätzt:

$$\|\Phi'\|_1 \leq \left\| \begin{pmatrix} |\frac{1}{10}| & |\frac{1}{5} + \frac{1}{10}| \\ |\frac{1}{10} + \frac{1}{20}| & |\frac{1}{20}| \end{pmatrix} \right\|_1 = 0.35$$

$$\|\Phi'\|_\infty \leq \left\| \begin{pmatrix} |\frac{1}{10}| & |\frac{1}{5} + \frac{1}{10}| \\ |\frac{1}{10} + \frac{1}{20}| & |\frac{1}{20}| \end{pmatrix} \right\|_\infty = 0.4$$

$\Rightarrow$ nehme z.B. $\|\Phi'\|_\infty \leq 0.4 =: L < 1 \rightarrow$ Kontraktion ($\checkmark$)
(Bem.: $\|x^n - x^*\|_\infty \leq \|x^n - x^*\|_1$)

3.1 Abbruchkriterium:

$\varepsilon = 10^{-3}$

$$x^0 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix} \qquad x^1 = \Phi(x^0) = \begin{pmatrix} 0.2755 \\ 0.0654 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \|x^1 - x^0\|_\infty = 0.4246$

a-priori:

$$k \geq \frac{\ln(\frac{\varepsilon(1-L)}{\|x^1 - x^0\|_\infty})}{\ln(L)} = 7.1868\ldots \qquad \text{(aufrunden!} \rightarrow \text{8 Iterationsschritte)}$$

3.2 Iteration:

$x_{k+1} = \Phi(x_k)$

$$\ldots, x^7 = \begin{pmatrix} 0.205062350 \\ 0.032348944 \end{pmatrix}, x^8 = \begin{pmatrix} 0.205062339 \\ 0.032348975 \end{pmatrix}$$

3.3 a-posteriori Fehlerbetrachtung:

$$\|x^8 - x^*\|_\infty \leq \frac{L}{1-L} \|x^8 - x^7\|_\infty = 7.1805 \cdot 10^{-9} << \varepsilon \text{ (a-priori zu pessimistisch)}$$