Numerische Mathematik I für Ingenieure SS12

Übungsaufgabe zur Singulärwertzerlegung

Gegeben sei das Ausgleichsproblem

$$\min_{x \in \mathbb{R}^3} \left\| \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -8 & 10 & 14 \\ 2 & 2 & 1 \\ -6 & -6 & -3 \\ -16 & 2 & 10 \end{pmatrix} x - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|$$

und von der auftretenden Matrix die Singulärwertzerlegung $A = U\Sigma V^T$ mit

$$U = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad V^T = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie sämtliche Lösungen des Ausgleichsproblems mit Hilfe der gegebenen Singulärwertzerlegung.

Lösung:

Eine Lösung $x \in \mathbb{R}^3$ des linearen Ausgleichsproblem liefert die Anwendung der Pseudoinversen A^+: $A^+ b = x$ mit $A^+ = V\Sigma^+ U^T$.

$$\underbrace{\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{V} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\Sigma^+} \cdot \underbrace{\frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -3 & -2 \\ -2 & -1 & -3 & 2 \\ 1 & -4 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{U^T} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} -10 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = x$$

Die Lösungsmenge $L(b) = x + \mathrm{kern}(A) = x + \mathrm{span}(1, -2, 2)^T$.