Numerische Mathematik I für Ingenieure SS13
Verständnisfragen – Hausübung 5

VF-1: Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine normierte untere Dreiecksmatrix, $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Diagonalmatrix mit Diagonaleinträgen $d_{i,i} > 0$, $i = 1, \ldots, n$.

1.	Falls eine Zerlegung $A = LDL^T$ existiert, dann ist A symmetrisch positiv definit.	
2.	Für jede invertierbare Matrix A existiert eine Zerlegung $A = LDL^T$.	
3.	Für jede symmetrische Matrix A existiert eine Zerlegung $A = LDL^T$.	
4.	Die Matrix LDL^T ist invertierbar.	

VF-2: Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch positiv definit, $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine normierte untere Dreiecksmatrix und $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Diagonalmatrix.

1.	Das Cholesky-Verfahren zur Bestimmung der Cholesky-Zerlegung $A = LDL^T$ ist nur dann stabil, wenn man Pivotisierung benutzt.	
2.	Der Aufwand des Cholesky-Verfahrens zur Bestimmung der Cholesky-Zerlegung $A = LDL^T$ ist ca. $\frac{1}{3}n^3$ Operationen.	
3.	Es sei $A = LDL^T$. Dann gilt $\det A = \prod_{i=1}^{n} d_{i,i}$, wobei $d_{i,i}$ die Diagonaleinträge der Matrix D sind.	
4.	Es gilt $\kappa_2(A) = \kappa_2(D)$, wobei $\kappa_2(.)$ die Konditionszahl bezüglich der euklidischen Norm ist.	

VF-3: Es seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine positiv definite Matrix und $A = L\,D\,L^T$ die Cholesky-Zerlegung von A.

1.	Es gilt: $\det(A) > 0$.	
2.	Es gilt: $\det(A) = \det(D)$.	
3.	Der Rechenaufwand des Cholesky-Verfahrens zur Bestimmung der Cholesky-Zerlegung ist etwa $\frac{1}{2}n^2$ Operationen.	
4.	Das Cholesky-Verfahren zur Bestimmung der Cholesky-Zerlegung ist nur dann stabil, wenn man Pivotisierung benutzt.	

VF-4: Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $m \geq n$.

1.	Alle Eigenwerte von A^TA sind größer als 0.	
2.	Wenn alle Spalten von A linear unabhängig sind, dann ist A^TA symmetrisch positiv definit.	
3.	Wenn alle Zeilen von A linear unabhängig sind, dann ist AA^T symmetrisch positiv definit.	
4.	Wenn alle Zeilen von A linear unabhängig sind, dann ist AA^T invertierbar.	

VF-5: Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $m \geq n$.

1.	Der Aufwand zur Berechnung von A^TA ist proportional zu $m^2\,n$.	
2.	Der Aufwand zur Berechnung von A^TA ist proportional zu $n^2\,m$.	
3.	Der Aufwand zur Berechnung von A^TA ist stets größer als der zum Lösen der Normalgleichungen.	
4.	Zur Lösung der Normalgleichungen verwendet man das Cholesky-Verfahren, weil das Vorwärts-/Rückwärtseinsetzen bei der $L\,D\,L^T$-Zerlegung ungefähr halb soviele Operationen benötigt wie das bei einer $L\,R$-Zerlegung.	

VF-6: Es seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine positiv definite Matrix und $A = L\,D\,L^T$ die Cholesky-Zerlegung von A.		
1.	Es gilt: $\det(A) > 0$.	
2.	Es gilt: $\det(A) = \det(D)$.	
3.	Der Rechenaufwand des Cholesky-Verfahrens zur Bestimmung der Cholesky-Zerlegung ist etwa $\frac{1}{2}n^2$ Operationen.	
4.	Das Cholesky-Verfahren zur Bestimmung der Cholesky-Zerlegung ist nur dann stabil, wenn man Pivotisierung benutzt.	

VF-7: Sei $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine orthogonale Matrix.		
1.	$\|Q\|_2 = 1$.	
2.	Q^T ist orthogonal.	
3.	$\|Q^{-1}\|_2 = 1$.	
4.	Q ist symmetrisch positiv definit.	

VF-8: Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit zugehöriger normierter unterer Dreiecksmatrix $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und regulärer Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$.		
1.	Der Cholesky-Algorithmus liefert nur dann eine Zerlegung $A = LDL^T$, wenn A symmetrisch und positiv definit ist.	
2.	Der Cholesky-Algorithmus liefert stets eine Zerlegung $A = LDL^T$, wenn A symmetrisch und regulär ist.	
3.	Bei bereits bekannter Zerlegung $A = LDL^T$ löst man das System $Ax = b$ am effizientesten, indem man zuerst das Produkt LD berechnet, dann aus $b = LDz$ durch Vorwärtseinsetzen z bestimmt und schließlich aus $z = L^T x$ durch Rückwärtseinsetzen x bestimmt.	
4.	Bei bereits bekannter Zerlegung $A = LDL^T$ löst man das System $Ax = b$ am effizientesten, indem man aus $b = Ly$ durch Vorwärtseinsetzen y bestimmt, dann $D^{-1}y$ berechnet und schließlich aus $D^{-1}y = L^T x$ durch Rückwärtseinsetzen x bestimmt.	

VF-9: Es sei $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ eine orthogonale Matrix und κ_2 bezeichne die Kondition bzgl. der $\|.\|_2$-Norm.		
1.	$Q^TQ = QQ^T = I$.	
2.	$\lvert\det(Q)\rvert = \|Q\|_2 = \|Q^T\|_2 = \|Q^{-1}\|_2 = \kappa_2(Q) = \kappa_2(Q^T) = \kappa_2(Q^{-1}) = 1$.	
3.	$\|Qx\|_2 = \|x\|_2 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^m$.	
4.	$\|QA\|_2 = \|A\|_2 \qquad \forall A \in \mathbb{R}^{m\times m}$.	
5.	$\kappa_2(QA) = \kappa_2(AQ) = \kappa_2(A) \qquad \forall A \in \mathbb{R}^{m\times m}$.	

VF-10: Beantworte alle Fragen bezüglich orthogonaler Matrizen $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ mit wahr oder falsch.		
1.	Orthogonale Matrizen sind stets symmetrisch.	
2.	Die $\|.\|_2$-Norm jeder Zeile und Spalte einer orthogonalen Matrix ist stets gleich 1.	
3.	Orthogonale Matrizen sind stets identisch mit ihrer Inversen.	
4.	Produkte orthogonaler Matrizen sind wieder orthogonal.	