Numerische Mathematik I für Ingenieure SS13
Verständnisfragen – Übung 6

VF-1: Es seien $\mathbf{0} \neq v \in \mathbb{R}^n$ und $Q_v = I - 2\,\frac{v\,v^T}{v^T v}$ die entsprechende Householder-Transformation. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!		
1.	$\|Q_v x\|_2 = \|x\|_2$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.	
2.	Q_v ist symmetrisch.	
3.	$Q_v v = -v$.	
4.	Q_v ist symmetrisch positiv definit.	

VF-2: Es seien $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ eine orthogonale Matrix, $R \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine obere Dreiecksmatrix und $A = Q\,R$. Ferner bezeichne $\kappa_2(A)$ die Konditionszahl der Matrix A bezüglich der Euklidischen Norm. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!		
1.	Ist $m = n$ und $\det(A) \neq 0$, so gilt $A^{-1} = R^T Q^T$.	
2.	Ist $m = n$ und $\det(A) \neq 0$, so gilt $\kappa_2(A) = \kappa_2(R)$.	
3.	Nicht alle $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ besitzen eine QR-Zerlegung.	
4.	Eine QR-Zerlegung kann man stets auf stabile Weise mittels Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung bestimmen.	

VF-3: Es seien $m > n$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b, \tilde{b} \in \mathbb{R}^m$ und $x^* \in \mathbb{R}^n$ die Lösung des linearen Ausgleichproblems $\|A\,x^* - b\|_2 = \min_{x\in\mathbb{R}^n} \|A\,x - b\|_2$. Weiter sei $\Theta \in [0, \frac{\pi}{2})$ der Winkel zwischen $A\,x^*$ und b sowie $\tilde{x}$ die Lösung des gestörten Problems $\|A\,\tilde{x} - \tilde{b}\|_2 = \min_{x\in\mathbb{R}^n} \|A\,x - \tilde{b}\|_2$. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!		
1.	$\frac{\|\tilde{x} - x^*\|_2}{\|x^*\|_2} \leq \frac{\kappa_2(A)}{\sin\Theta} \frac{\|\tilde{b} - b\|_2}{\|b\|_2}$	
2.	$\frac{\|\tilde{x} - x^*\|_2}{\|x^*\|_2} \leq \frac{\kappa_2(A)}{\cos\Theta} \frac{\|\tilde{b} - b\|_2}{\|b\|_2}$	
3.	$\frac{\|\tilde{x} - x^*\|_2}{\|x^*\|_2} \leq \tan\Theta\ \kappa_2(A) \frac{\|\tilde{b} - b\|_2}{\|b\|_2}$	
4.	Je größer der Winkel Θ, desto schlechter ist das Problem konditioniert.	

VF-4: Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $m \geq n$. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!		
1.	Alle Eigenwerte von $A^T A$ sind größer als 0.	
2.	Wenn alle Spalten von A linear unabhängig sind, dann ist $A^T A$ symmetrisch positiv definit.	
3.	Wenn alle Zeilen von A linear unabhängig sind, dann ist AA^T symmetrisch positiv definit.	
4.	Wenn alle Zeilen von A linear unabhängig sind, dann ist AA^T invertierbar.	