

# Numerische Mathematik I für Ingenieure SS13

## Verständnisfragen – Hausübung 8

**VF-1:** Mit  $k \in \mathbb{N}$  und den Iterationswerten  $x_k \in \mathbb{R}$  gelte  $x^* = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$ . Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!

1.	Die Folge $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert mit mindestens der Ordnung $p > 1$ gegen $x^*$ , wenn $c > 0$ und $k_0 \in \mathbb{N}$ existieren, so dass $ x_{k+1} - x^*  \leq c x_k - x^* ^p$ für alle $k \geq k_0$ gilt.	wahr
2.	Die Folge $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert mit mindestens der Ordnung $p = 1$ gegen $x^*$ , wenn $c > 1$ und $k_0 \in \mathbb{N}$ existieren, so dass $ x_{k+1} - x^*  \leq c x_k - x^* $ für alle $k \geq k_0$ gilt.	falsch
3.	Ein iteratives Verfahren hat die Konvergenzordnung $p > 1$ , wenn sich die Anzahl gültiger Stellen asymptotisch (d. h. für $k \rightarrow \infty$ ) von Iterationsschritt zu Iterationsschritt um den Faktor $p$ vergrößert.	wahr
4.	Je größer die Konvergenzordnung $p$ ist, desto kleiner ist das kleinste $k \in \mathbb{N}$ mit $x_k = x^*$ .	falsch

**VF-2:** Mit der stetig differenzierbaren Funktion  $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  und den Iterationswerten  $x^k \in \mathbb{R}^n$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , betrachten wir die Iterationsvorschrift  $x^{k+1} := \Phi(x^k)$ . Ferner sei  $E$  eine abgeschlossene Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$ ,  $x^0 \in E$  und  $L \in [0, 1)$ . Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!

1.	Ist $\Phi$ selbstabbildend und kontraktiv in $E$ , so ist $x^* = \lim_{k \rightarrow \infty} x^k$ äquivalent zu $\Phi(x^*) = x^* \in E$ , egal ob $E$ konvex ist oder nicht.	wahr
2.	Ist die Teilmenge $E \subset \mathbb{R}^n$ konvex, mit $\Phi(E) \subset E$ sowie $\ \Phi'(x)\  \leq L \forall x \in E$ in einer beliebigen Operatornorm, so konvergiert die Folge $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ gegen den eindeutigen Fixpunkt $x^* \in E$ .	wahr
3.	Ist $E$ konvex, so ist in einer beliebigen Operatornorm $\ \Phi'(x)\  \leq L \forall x \in E$ hinreichend für die Kontraktivität von $\Phi$ in $E$ .	wahr
4.	$\Phi$ ist kontraktiv in $E$ , wenn in einer beliebigen Norm gilt $\ \Phi(x) - \Phi(y)\  \leq L\ x - y\  \forall x, y \in E$ .	wahr

**VF-3:** Es sei  $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar, und für  $x^* \in \mathbb{R}$  gelte  $\Phi(x^*) = x^*$  und  $|\Phi'(x^*)| < 1$ . Mit  $x_0 \in \mathbb{R}$  wird die Fixpunktiteration  $x_{k+1} := \Phi(x_k)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  definiert. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!

1.	Die Fixpunktiteration konvergiert stets, wenn $ x_0 - x^* $ hinreichend klein ist.	wahr
2.	Die Konvergenzordnung der Fixpunktiteration kann größer als 2 sein.	wahr
3.	Für $\Phi(x) = 5 \arctan(x) + 8$ konvergiert das Fixpunktverfahren für beliebige Startwerte $x_0 \in \mathbb{R}$ gegen den eindeutigen Fixpunkt von $\Phi$ in $\mathbb{R}$ .	wahr
4.	Falls $\Phi'(x^*) = 0$ gilt, ist die Konvergenzordnung der Fixpunktiteration größer als 1.	wahr

**VF-4:** Es seien  $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar und  $x^*$  so, dass  $\Phi(x^*) = x^*$  gilt. Für  $x_0 \in \mathbb{R}$  wird die Fixpunktiteration  $x_{k+1} = \Phi(x_k)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  definiert.

1.	Falls $ \Phi'(x^*)  < 1$ gilt, so konvergiert die Fixpunktiteration für alle Startwerte $x_0$ mit $ x_0 - x^* $ hinreichend klein.	wahr
2.	Falls $ \Phi'(x^*)  > 1$ gilt, so existiert kein $x_0 \neq x^*$ mit $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*$ .	falsch
3.	Die Konvergenzordnung der Fixpunktiteration ist in der Regel 1.	wahr
4.	Falls $\Phi'(x^*) = 0$ gilt, so konvergiert die Fixpunktiteration für alle Startwerte $x_0$ mit $ x_0 - x^* $ hinreichend klein, und die Konvergenzordnung ist größer als 1.	wahr