

Numerische Mathematik I für Ingenieure SS13

Verständnisfragen – Hausübung 11

VF-1: Es sei $\Pi_n = \left\{ \sum_{j=0}^n a_j x^j \mid a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R} \right\}$ der Raum der Polynome vom Grade (höchstens) n . Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!

1.	$\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ bildet eine Basis von Π_n .	
2.	$\{\alpha_0, \alpha_1 x, \alpha_2 x^2, \dots, \alpha_n x^n\}$ bildet für beliebige, nicht verschwindende Koeffizienten $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ eine Basis von Π_n .	
3.	$\{1, x - \alpha_1, (x - \alpha_1)(x - \alpha_2), \dots, \prod_{i=1}^n (x - \alpha_i)\}$ bildet für beliebige Koeffizienten $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ eine Basis von Π_n .	
4.	Der Raum Π_n hat die Dimension n .	

VF-2: Sei $P(f|x_0, \dots, x_n)$ das Lagrange-Interpolationspolynom zu den Daten $f(x_i), i = 0, \dots, n$ mit den Stützstellen $a = x_0 < \dots < x_n = b$ für $n \in \mathbb{N}$. Sei $e(x) := f(x) - P(f|x_0, \dots, x_n), x \in \mathbb{R}$ der Fehler im Intervall $I := [\min(a, x), \max(b, x)]$. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!

1.	$e(x_i) = 0, i = 0, \dots, n$.	
2.	Für $f \in C^{n+1}(I)$ existiert ein $\xi \in I$, so dass $e(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i) \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi).$	
3.	Es sei $[c, d] \not\subseteq I$. Der Interpolationsfehler lässt sich dann für alle $x \in [c, d]$ wie folgt abschätzen: $ e(x) \leq \max_{z \in [c, d]} \left \prod_{i=0}^n (z - x_i) \right \max_{z \in [c, d]} \frac{ f^{(n+1)}(z) }{(n+1)!}.$	
4.	Sei $f(x) = 1/(1+x^2), x \in [-5, 5]$. Für festes $n \in \mathbb{N}$ seien die Stützstellen $x_{j,n} = -5 + 10j/n, j = 0, \dots, n$ gegeben. Dann gilt für den Fehler: $\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{x \in [-5, 5]} f(x) - P(f x_0, \dots, x_n) = 0$.	

VF-3: Es sei $P(f | x_0, \dots, x_n)$ das Interpolationspolynom zu den Daten $(x_0, f(x_0)), \dots, (x_n, f(x_n))$ mit $x_0 < \dots < x_n$, und $x, x^* \in [x_0, x_n]$. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!

1.	$P(f x_0, \dots, x_n)$ kann man an der Stelle x^* effizient mit dem Neville-Aitken-Schema auswerten.	
2.	$P(f x_0, \dots, x_n)$ kann man effizient mit dem Neville-Aitken-Schema bestimmen.	
3.	$P(f x_0, \dots, x_n)$ lässt sich sowohl mit dem Newton-Schema als auch mittels der Lagrange-Fundamentalpolynome aufstellen.	
4.	Sowohl die Newton-Interpolation als auch das Neville-Aitken-Schema haben zur Auswertung von $P(f x_0, \dots, x_n)(x)$ einen Aufwand von $\mathcal{O}(n^2)$	

VF-4: Sei $P(f|x_0, \dots, x_n)$ das Lagrange-Interpolationspolynom zu den Daten $f(x_i), i = 0, \dots, n$ mit den Stützstellen $x_0 < \dots < x_n$ für $n \in \mathbb{N}$. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!

1.	Seien l_{jn} die Lagrangeschen Fundamentalpolynome. Dann gilt für das Interpolationspolynom: $P(f x_0, \dots, x_n)(x) = \sum_{j=0}^n f(x_j) l_{jn}(x), x \in \mathbb{R}.$	
2.	$P(f x_0, \dots, x_n) = \sum_{j=0}^n a_j x^j$ ist immer ein Polynom vom Grad n mit $a_n \neq 0$.	
3.	Es existiert genau ein Polynom $p \in \Pi_n$ mit $p(x_i) = f(x_i), i = 0, \dots, n$.	
4.	$P(f x_0, \dots, x_n)(x_i) = f(x_i), i = 0, \dots, n$.	