Numerische Mathematik I für Ingenieure SS13
Verständnisfragen – Übung 11

VF-1: Es seien $x_0, \dots, x_n$ paarweise verschiedene Stützstellen und $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!

1.	Der Wert $[x_0, x_1, \dots, x_n]f$ hängt nicht von der Reihenfolge der Stützstellen ab.	
2.	Für die Newton-Basispolynome (Knotenpolynome) ω_j gilt: $[x_0, \dots x_k]\omega_j = \delta_{jk}$ für $j, k = 0, \dots, n$.	
3.	Der Rechenaufwand zur Berechnung der Koeffizienten in den Newtonschen Interpolationsformeln mit dem Schema der dividierten Differenzen beträgt $\frac{1}{2}n^2$ Divisionen und n^2 Subtraktionen.	
4.	Für numerische Berechnungen ist die Darstellung des Polynomes in Potenzform (Normalform) stets geeignet.	

VF-2: Es sei $P(f \mid x_0, \dots, x_n)$ das Lagrange–Interpolationspolynom zu den Daten $(x_0, f(x_0)), \dots, (x_n, f(x_n))$ mit $x_0 < \dots < x_n$.
Es sei δ_n der führende Koeffizient dieses Polynoms und $[x_0, \dots, x_n]\, f$ die dividierte Differenz der Ordnung n von f.

1.	Es gilt: $\delta_n = [x_0, \dots, x_n]\, f$.	
2.	Es gilt: $P(f \mid x_0, \dots, x_n)^{(n)}(x) = n!\, \delta_n$ für alle $x \in \mathbb{R}$.	
3.	$[x_0, x_1]\, f = f(x_1) - f(x_0)$.	
4.	Mit $f(x) := 2x^4$ gilt $[x_0, \dots, x_n]\, f = 2$ für alle $n \geq 4$.	

VF-3: Es sei $\Pi_n = \left\{ \sum_{j=0}^{n} a_j x^j | a_0, ..., a_n \in \mathbb{R} \right\}$ der Raum der Polynome vom Grade (höchstens) n. Ferner sei $P(f \mid x_0, \dots, x_n)$ das Lagrange–Interpolationspolynom zu den Daten $(x_0, f(x_0)), \dots, (x_n, f(x_n))$.

1.	Die Lagrange–Fundamentalpolynome $l_{jn}(x) = \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\dots(x-x_n)}{(x_j-x_0)\dots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\dots(x_j-x_n)}$, $0 \leq j \leq n$ bilden eine Basis von Π_n.	
2.	Die Lagrange–Fundamentalpolynome zur Darstellung von $P(f \mid x_0, \dots, x_n)$ sind gerade so konstruiert, dass gilt: $l_{jn}(x_i) = \delta_{ji}, \quad i, j = 0, \dots, n$.	
3.	$\{a_0, a_1\, x, a_2\, x^2, \dots, a_n\, x^n\}$ bildet für beliebige, nicht verschwindende Koeffizienten $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ eine Basis von Π_n.	
4.	Für ein festes $\bar{x}$ ist die Auswertung von $P(f \mid x_0, \dots, x_n)(\bar{x})$ sowohl mittels Neville-Aitken-Schema, als auch mittels Berechnung einer Newton-Darstellung und anschließender Auswertung von der Ordnung $\mathcal{O}(n)$.	

VF-4: Es sei $P(f|x_0, \dots, x_n)$ das Lagrange–Interpolationspolynom zu den Daten $(x_0, f(x_0)), \dots, (x_n, f(x_n))$ mit $x_0 < \dots < x_n$.

1.	$P(\Psi|x_0, \dots, x_n) = \Psi$ für alle Polynome Ψ.	
2.	Für beliebige f ist $P(f|x_0, \dots, x_n)(x_i) = f(x_i)$ für $i = 0, 1, \dots, n$.	
3.	Für genügend oft stetig differenzierbare Funktionen f gilt: $P(f|x_0, \dots, x_n)(x) = f(x)$ für alle $x \in [x_0, x_n]$.	
4.	Der Fehler $\max_{x \in [x_0, x_n]} |P(f|x_0, \dots, x_n)(x) - f(x)|$ wird mit wachsendem n immer kleiner.	