Numerische Mathematik I für Ingenieure SS13
Verständnisfragen – Hausübung 12

VF-1: Sei $f \in C[a,b]$. Das Integral $I(f) := \int_a^b f(x)dx$ werde durch eine Newton-Cotes-Formel $I_m(f)$ zu Stützstellen $a \leq x_0 < \ldots < x_m \leq b$ approximiert. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!

1.	$I_m(f) = \int_a^b P(f\|x_0,\ldots,x_m)dx$ wobei $P(f\|x_0,\ldots,x_m)$ das Interpolationspolynom von f zu den Stützstellen $x_0 < \ldots < x_m$ ist.	
2.	$I_m(q) = I(q)$ für alle $q \in \Pi_m$.	
3.	Falls $f \in C^{m+1}[a,b]$, dann gilt für den Fehler $\|I(f) - I_m(f)\| \leq \frac{(b-a)^{m+1}}{(m+1)!} \max_{x\in[a,b]} \left\|f^{(m+1)}(x)\right\|$.	
4.	Bei Newton-Cotes-Formeln höherer Ordnung kann Auslöschung auftreten (instabil).	

VF-2: Das Integral $I(f) := \int_c^d f(x)\,dx$ soll numerisch approximiert werden durch eine Quadraturformel $(d-c)\sum_{j=0}^m c_j f(x_j)$, mit $c \leq x_0 < \ldots < x_m \leq d$. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!

1.	Newton-Cotes-Formeln basieren auf der analytischen Integration eines Interpolationspolynoms an f mit äquidistanten Stützstellen x_j.	
2.	Bei allen Newton-Cotes-Quadraturformeln hängen die Integrationsgewichte c_j nicht von der Funktion f ab.	
3.	Die Newton-Cotes-Formeln sind stets exakt, wenn f ein Polynom vom Grade $\leq m+1$ ist.	
4.	Die Gewichte c_j sind bei Newton-Cotes-Quadraturformeln immer alle positiv.	

VF-3: Sei $f \in C[a,b]$. Das Integral $I(f) := \int_a^b f(x)dx$ werde durch eine Gauss-Formel $\tilde{I}_m(f) := \sum_{i=0}^m \omega_i\, f(x_i)$ approxomiert. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!

1.	Die Stützstellen sind äquidistant verteilt.	
2.	$\tilde{I}_m(q) = I(q)$ für alle $q \in \Pi_{2m+1}$.	
3.	Die Gewichte ω_i sind alle positiv.	
4.	Falls $f \in C^{2m+2}[a,b]$, dann gibt es ein c_m, so dass für den Fehler gilt: $\|I(f) - \tilde{I}_m(f)\| \leq c_m \max_{x\in[a,b]} \left\|f^{(2m+2)}(x)\right\|$.	