11. Großübung

Polynominterpolation

Allgemeines Problem:

Aufgrund gegebener Messwerte (Paare aus Werten x_i und Funktionswerten $f(x_i)$) soll ein Funktionsverlauf rekonstruiert bzw. zumeist angenähert werden.
Aufgabe:
Lege Polynom durch gegebene Messwerte.
(Lagrange-)Interpolationsaufgabe:
Finde ein *Polynom*, sodass die Funktionswerte exakt angenommen werden.
gegeben:
Daten $x_0, x_1, x_2, .., x_n$ und $f(x_0), f(x_1), .., f(x_n)$.
gesucht:
Polynom $p \in \Pi_n$ (Raum aller Polynome bis zum Grad n), sodass

$$p(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, .., n.$$

Der Raum aller Polynome bis zum Grad n ist z.B. wie folgt definiert:

$$\Pi_n := \{v : v(x) = a_0 + a_1 x + .. + a_n x^n, \ a_i \in \mathbb{R} \text{ beliebig}\}$$

D.h. ein Polynom aus Π_n hat $n+1$ Parameter (Freiheitsgrade). In der Monomdarstellung ($p(x) = a_0 + a_1 x + .. + a_n x^n$) sind die Paramter gerade $a_0, a_1, .., a_n$.

Beispiel 1 (Teil 1):

Es sind folgende Messpunkte gegeben.

x_i	-1	0	1	2
$f(x_i)$	1	1	0	2

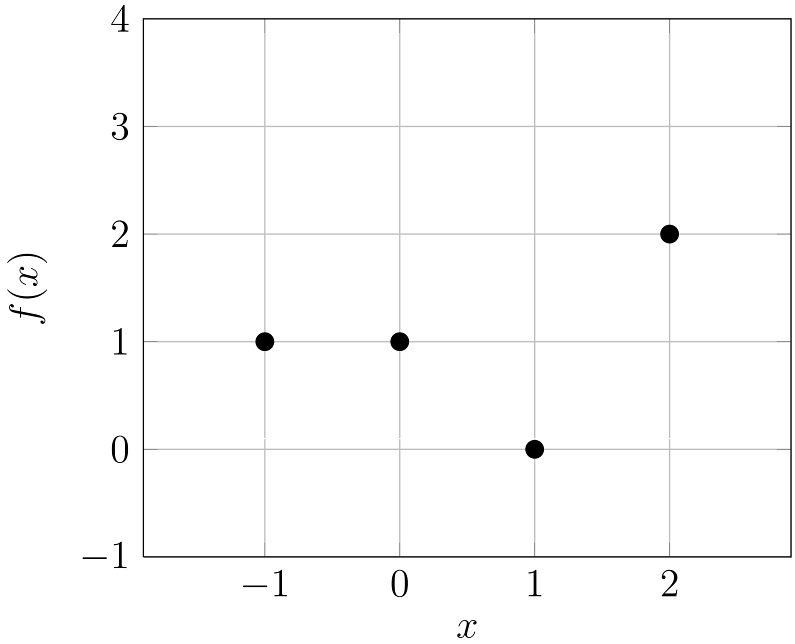

Abbildung 1: Messpunkte zu Beispiel 1.

Ansatz (Lagrange-Fundamentalpolynome) I:

Zerlege Problem in Teilprobleme, bei denen jeweils alle Funktionswerte Null sind außer einem.

Beispiel 1 (Teil 2):

Teilprobleme:

x_i	-1	0	1	2
$f^0(x_i)$	1	0	0	0
$f^1(x_i)$	0	1	0	0
$f^2(x_i)$	0	0	0	0
$f^3(x_i)$	0	0	0	2

Ansatz (Lagrange-Fundamentalpolynome) II:

Das (weiter vereinfachte) Problem

x_i	x_0	...	x_{j-1}	x_j	x_{j+1}	...	x_n
$q(x_i)$	0	...	0	1	0	...	0

kann mit dem Lagrange-Fundamentalpolynom gelöst werden. Dieses ist

$$q(x) = \prod_{k=0,k\neq j}^{n} \frac{x - x_k}{x_j - x_k} =: l_{jn}(x)$$

und ist eins bei x_j und an allen anderen Stützstellen Null, $l_{jn}(x_k) = \delta_{jk}$. Der Grad von l_{jn} ist n. Demnach löst $f(x_j) \cdot q(x) = f(x_j) \cdot l_{jn}(x)$ das Problem mit den folgenden Messwerten:

x_i	x_0	...	x_{j-1}	x_j	x_{j+1}	...	x_n
$q(x_i)$	0	...	0	$f(x_j)$	0	...	0

Durch Addition solcher Polynome bekommt man eine Lösung des Gesamtproblems.

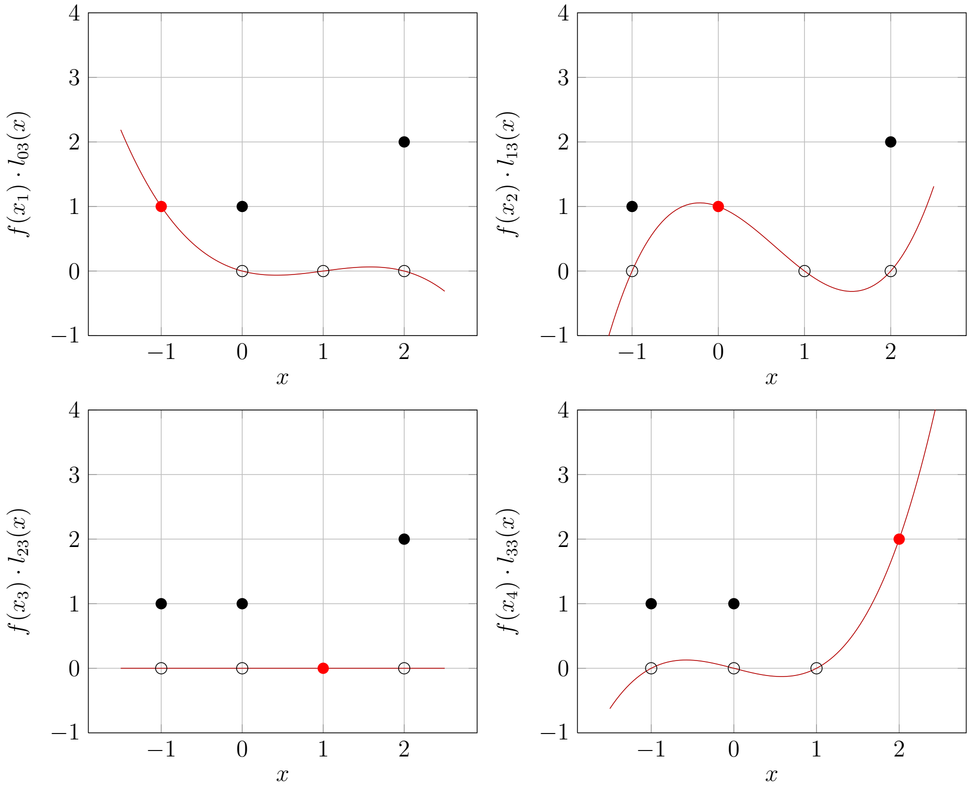

Abbildung 2: Skalierte Lagrange-Funktionen zu Punkt x_1, x_2, x_3 und x_4.

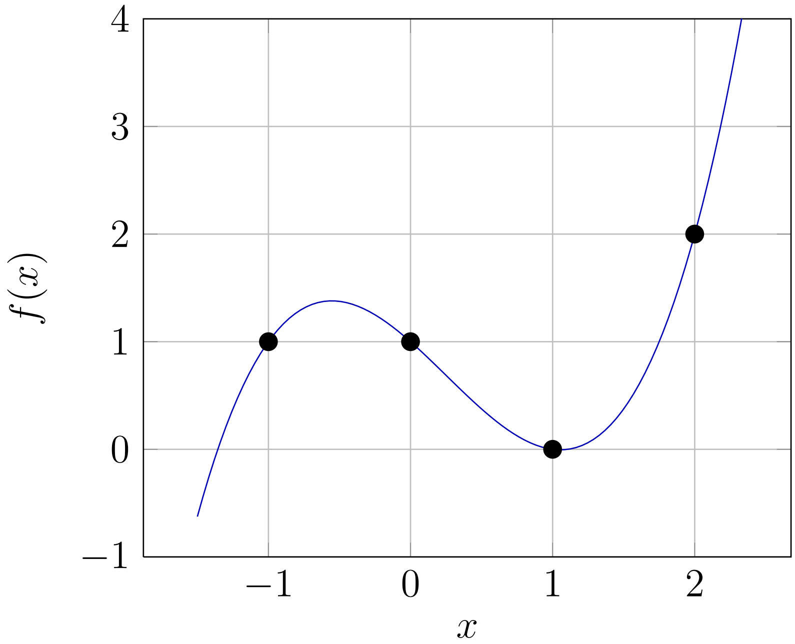

Abbildung 3: Das Interpolationspolynom zu Beispiel 1.

Beispiel 1 (Teil 3):

Die Lagrange-Fundamentalpolynome zu diesem Beispiel sind:

$$
\begin{aligned}
l_{03}(x) &= \left(\tfrac{x-0}{(-1)-0}\right)\cdot\left(\tfrac{x-1}{(-1)-1}\right)\cdot\left(\tfrac{x-2}{(-1)-2}\right) &&= -\frac{1}{6}\cdot x^3+\frac{1}{2}\cdot x^2-\frac{1}{3}\cdot x+0\cdot 1 &&\mid\cdot 1\\
l_{13}(x) &= \left(\tfrac{x-(-1)}{0-(-1)}\right)\cdot\left(\tfrac{x-1}{0-1}\right)\cdot\left(\tfrac{x-2}{0-2}\right) &&= +\frac{1}{2}\cdot x^3-1\cdot x^2-\frac{1}{2}\cdot x+1\cdot 1 &&\mid\cdot 1\\
l_{23}(x) &= \left(\tfrac{x-(-1)}{1-(-1)}\right)\cdot\left(\tfrac{x-0}{1-0}\right)\cdot\left(\tfrac{x-2}{1-2}\right) &&= -\frac{1}{2}\cdot x^3+\frac{1}{2}\cdot x^2+1\cdot x+0\cdot 1 &&\mid\cdot 0\\
l_{33}(x) &= \left(\tfrac{x-(-1)}{2-(-1)}\right)\cdot\left(\tfrac{x-0}{2-0}\right)\cdot\left(\tfrac{x-1}{2-1}\right) &&= +\frac{1}{6}\cdot x^3+0\cdot x^2-\frac{1}{6}\cdot x+0\cdot 1 &&\mid\cdot 2
\end{aligned}
$$

In Abbildung 2 sind die skalierten Fundamentalpolynome $f(x_4)\cdot l_{i3},\ i=0,..3$ abgebildet. Beachte das diese gerade die Interpolationspolynome für die Teilproblemfunktionen $f^i(x)$ sind. Summiert man diese Terme auf, so erhält man das gesamte Interpolationspolynom:

$$p(x)=\sum_{i=0}^{3} f(x_i)\cdot l_{i3}(x)=\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-\frac{7}{6}x+1$$

Aufwand Interpolation mit Lagrange-Fundamentalpolynomen:

Der Aufwand zum Auswerten eines Lagrange-Fundamentalpolynoms beträgt:

$$(\underbrace{n}_{Divisionen} + \underbrace{n-1}_{Multiplikationen})$$

Das Auswerten des Interpolationspolynoms an einer Stelle x in der Form

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \cdot l_{in}(x)$$

demnach

$$(\underbrace{n}_{Divisionen} + \underbrace{n-1}_{Multiplikationen} + \underbrace{1}_{f(x_j)}) \cdot \underbrace{(n+1)}_{\text{Stützstellen}} = 2n(n+1) = \mathcal{O}(n^2).$$

Man beachte, dass der Aufwand dabei stark von der Darstellung von Polynomen abhängt. Der hier dargestellte Aufwand bezieht sich auf die Darstellung des Polynoms in der "LagrangeBasis. Unterschiedliche Basen von Polynomen werden im nächsten Abschnitt behandelt.

Basen von Polynomen

Es existieren verschiedene Darstellungsformen für Polynome:

- monomiale Basis:

$$1, x, x^2, ..., x^j, ..., x^n$$

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$$

- Lagrangesche Basis:

$$l_{jn} = \prod_{k=0,k\neq j}^{n} \frac{x - x_k}{x_j - x_k}$$

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j l_{jn}(x)$$

- Newtonsche Basis:

$$1, (x - x_0), (x - x_0) \cdot (x - x_1), .., \prod_{k=0}^{j-1}(x - x_k), ..$$

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j \prod_{k=0}^{j-1} (x - x_k)$$

z.B.:

$$p(x) = 1 + 2 \cdot (x - 0) + 1 \cdot (x - 0)(x - 1) + 3 \cdot (x - 0)(x - 1)(x - 3)$$

Das (Lagrange-)Interpolationsproblem ist *eindeutig* lösbar. Der Hinweis in Klammern (Lagrange-) bedeutet, dass nur die Funktionswerte verwendet werden und nicht andere Informationen zur Interpolation herangezogen werden. Alternativen sind z.B. die Hermit-Interpolation bei der auch Ableitungsinformationen bei der Interpolation verwendet werden (in dieser Veranstaltung nicht betrachtet).

Alle Polynomdarstellungen können ineinander umgeformt werden. Es gibt also verschiedene Darstellungen für das gleiche Polynom.

Das Horner-Schema:

Das Horner-Scheme erlaubt eine schnelle Auswertung von Polynomen in monomialer Darstellung oder in der Darstellung der Newton-Basis. Dabei wird geschickt geklammert:

- monomiale Basis:

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j = a_0 + x(a_1 + x(a_2 + ... + x(a_{n-1} + x a_n)...))$$

- Newtonsche Basis:

$$\begin{aligned} p(x) &= \sum_{j=0}^{n} c_j \prod_{k=0}^{j-1} (x - x_k) \\ &= c_0 + (x - x_0)(c_1 + (x - x_1)(c_2 + ... + (x - x_{n-2})(c_{n-1} + (x - x_{n-1})c_n)...)) \end{aligned}$$

Der Aufwand zur Auswertung beträgt nur n Multiplikationen. In Potenzform (naive Auswertung) und bei der Lagrangeschen Basis ist der Aufwand $\mathcal{O}(n^2)$.

Neville-Aitken Idee

Man betrachtet zwei Interpolationspolynome. $f_1(x)$ sei das Interpolationspolynom zu der Funktion f an den Punkten $x_0, ..x_{n-1}$, wir schreiben auch $f_1(x) = P(f|x_0, .., x_{n-1})$ und $f_2(x)$ sei das Interpolationspolynom zu der Funktion f an den Punkten $x_1, ..x_n$, also auch $f_2(x) = P(f|x_1, .., x_n)$. f_1 und

f_2 stimmen somit an allen inneren Punkten $(x_1, ..x_{n-1})$ überein. Für die Interpolation an allen Punkten gibt bei x_0 die Funktion f_1 den richtigen Wert, am Punkt x_n die Funktion f_2. Deswegen kann man das Interpolationspolynom für alle Punkte $p(x) = P(f|x_0, .., x_n)(x)$ wie folgt konstruieren:
Man (konvex-)kombiniert die beiden Funktionen f_1 und f_2 zu $p(x) = \alpha(x) \cdot f_1(x) + (1 - \alpha(x)) \cdot f_2(x)$. An allen inneren Punkten sind f_1 und f_2 gleich und damit hat $p(x)$ dort auch den gleichen Wert. Nun wählen wir $\alpha(x)$ so, dass f_1 am Punkt x_0 voll gewichtet wird und f_2 gar nicht. Im Punkt x_n umgekehrt. Da $p(x)$ ein Polynom vom Grad n sein soll, darf $\alpha(x)$ nur vom Grad eins sein.

$$\alpha \in \Pi^1, \quad \alpha(x_0) = 1, \quad \alpha(x_n) = 0$$

Damit ergibt sich dann die *Aitken-Formel*:

$$P(f|x_0, .., x_n) = \frac{x_n - x}{x_n - x_0} P(f|x_0, .., x_{n-1}) + \frac{x - x_0}{x_n - x_0} P(f|x_1, .., x_n)$$

Beispiel 1 (Teil 4):

Die entsprechenden Terme der Aitken-Komposition sind in Abbildung 4 abgebildet.

Neville-Aitken Schema

Mit der Idee Interpolationspolynome als Konvexkombination von anderen (einfacheren) Interpolationspolynomen aufzuschreiben, ergibt sich eine Vorschrift Interpolationspolynome rekursiv zu bestimmen. Wenn man nur Auswertungen an konkreten Stellen benötigt (und nicht das komplette Polynom), so kann das Neville-Aitken Schema angewandt werden. Siehe hierzu auch Folie 8.6, Folie 8.7:

Beispiel 1 (Teil 5), Neville-Aitken:

Wir wollen nun das Neville-Aitken-Schema anwenden, um das Interpolationspolynom an der Stelle $x = \frac{1}{2} = 0.5$ auszuwerten. $P(f, x_0, .., x_3)(0.5) =?$. Das Neville-Aitken-Tableau hat die folgende Form, dabei kann man direkt die Werte aus der Tabelle übertragen, da die Funktionswerte gleichzeitig die Interpolationspolynome nullter Ordnung an den entsprechenden Stellen sind.

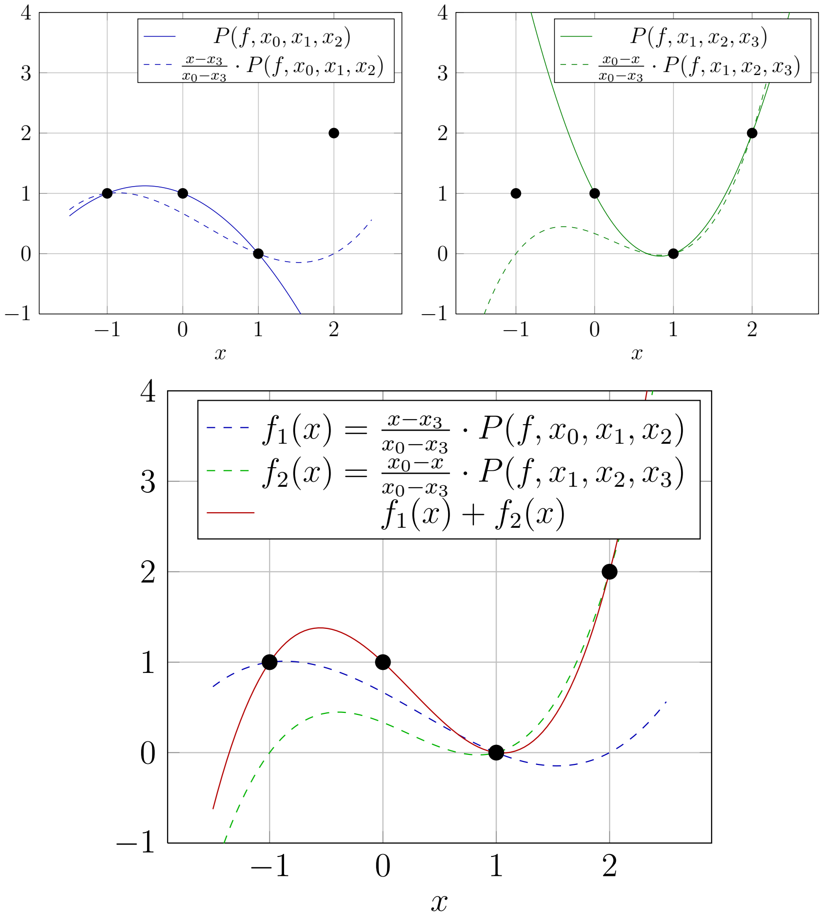

Abbildung 4: Zu Beispiel 1: (gewichtete) Interpolationspolynome mit drei Punkten und deren Addition.

x_i	$P_{i,0}$	$P_{i,1}$	$P_{i,2}$	$P_{i,3}$
-1	**1**			
0	**1**	$P_{1,1}$		
1	**0**	$P_{2,1}$	$P_{2,2}$	
2	**2**	$P_{3,1}$	$P_{3,2}$	$P_{3,3}$

Hierbei ist $P_{k,j} = P(f|x_{k-j}, .., x_k)(x = \frac{1}{2})$.
Zunächst berechnen wir $P_{1,1}$. Dies können wir machen indem wir die Konvexkombination aufschreiben:

$$P_{1,1} = \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0} P_{0,0} + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} P_{1,0}$$

Formen wir dies weiter um, so erhalten wir die geläufigere Form

$$P_{1,1} = P_{1,0} + (x - x_1)\frac{P_{1,0} - P_{0,0}}{x_1 - x_0} = 1 + (\frac{1}{2} - 1)\frac{1 - 1}{0 - (-1)} = 1$$

Analog fahren wir fort:

$$P_{2,1} = P_{2,0} + (x - x_2)\frac{P_{2,0} - P_{1,0}}{x_2 - x_1} = 0 + (\frac{1}{2} - 1)\frac{0 - 1}{1 - 0} = \frac{1}{2}$$

$$P_{3,1} = P_{3,0} + (x - x_3)\frac{P_{3,0} - P_{2,0}}{x_3 - x_2} = 2 + (\frac{1}{2} - 2)\frac{2 - 0}{2 - 1} = -1$$

Jetzt bildet man die Konvexkombination bzgl. der "äußeren"Punkte, da alle ïnneren"Punkte für die entsprechenden Terme gleich sind. Hierbei ist es nicht wichtig, dass die x_i sortiert sind.

$$P_{2,2} = P_{2,1} + (x - x_2)\frac{P_{2,1} - P_{1,1}}{x_2 - x_0} = \frac{1}{2} + (\frac{1}{2} - 1)\frac{\frac{1}{2} - 1}{1 - (-1)} = \frac{5}{8}$$

$$P_{3,2} = P_{3,1} + (x - x_3)\frac{P_{3,1} - P_{2,1}}{x_3 - x_1} = -1 + (\frac{1}{2} - 2)\frac{-1 - \frac{1}{2}}{2 - 0} = \frac{1}{8}$$

$$P_{3,3} = P_{3,2} + (x - x_3)\frac{P_{3,2} - P_{2,2}}{x_3 - x_0} = \frac{1}{8} + (\frac{1}{2} - 2)\frac{\frac{1}{8} - \frac{5}{8}}{2 - (-1)} = \frac{3}{8}$$

Das Ergebnis ist also $P(f|x_0, .., x_3)(\frac{1}{2}) = \frac{3}{8}$.

x_i	$P_{i,0}$	$P_{i,1}$	$P_{i,2}$	$P_{i,3}$
-1	**1**			
0	**1**	1		
1	**0**	1/2	5/8	
2	**2**	-1	1/8	3/8

Eigenschaften Neville-Aitken-Schema:

- Effiziente Auswertung an (nur!) einer Stelle, Aufwand n^2.
- weitere Stützstellen können leicht hinzugefügt werden.
- Stützstellen müssen nicht sortiert sein.

Newton Schema

Mit der Notation $\delta_n = \frac{f(x_n)-P_{n-1}(x_n)}{(x-x_0)\cdots(x_n-x_{n-1})} =: [x_0,..,x_n]f$ (s. Folie 8.12) gilt die Horner-artige Darstellung:

$$\begin{aligned} P(f|x_0,..,x_n)(x) &= [x_0]f + (x-x_0)[x_0,x_1]f \\ &\quad +(x-x_0)(x-x_1)[x_0,x_1,x_2]f + ... \\ &\quad +(x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})[x_0,...,x_n]f. \end{aligned}$$

und die Beziehung

$$[x_0,..,x_n]f = \frac{[x_1,..,x_n]f - [x_0,..,x_{n-1}]f}{x_n - x_0}$$

(siehe auch Folie 8.13, Folie 8.14). Mit Hilfe dieser Beziehung kann man nun ähnlich dem Neville-Aitken-Schema die Koeffizienten in einer Tabelle berechnen, wo $[x_i]f = f(x_i)$ gegeben ist:

	$[x_i]f$		$[x_i,x_{i+1}]f$		$[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]f$		$[x_i,x_{i+1},x_{i+2},x_{i+3}]f$ $\cdots$
x_0	$[x_0]f$						
		$>$	$[x_0,x_1]f$				
x_1	$[x_1]f$			$>$	$[x_0,x_1,x_2]f$		
		$>$	$[x_1,x_2]f$			$>$	$[x_0,x_1,x_2,x_3]f$
x_2	$[x_2]f$		$\vdots$	$>$	$[x_1,x_2,x_3]f$		$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$				$\vdots$		

Aus den Koeffizienten der obersten Zeile lässt sich das Polynom explizit angeben.

Beispiel 1 (Teil 6), Newton Schema / Dividierte Differenzen:

	$[x_i]f$		$[x_i,x_{i+1}]f$		$[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]f$		$[x_i,x_{i+1},x_{i+2},x_{i+3}]f$
-1	1						
		$>$	$[x_0,x_1]f$				
0	1			$>$	$[x_0,x_1,x_2]f$		
		$>$	$[x_1,x_2]f$			$>$	$[x_0,x_1,x_2,x_3]f$
1	0			$>$	$[x_1,x_2,x_3]f$		
		$>$	$[x_2,x_3]f$				
2	2						

Die Berechnung mit dividierten Differenzen liefert jetzt:

$$
\begin{aligned}
[x_0, x_1]f &= \frac{[x_1]f - [x_0]f}{x_1 - x_0} = \frac{1-1}{0-(-1)} = 0 \\
[x_1, x_2]f &= \frac{[x_2]f - [x_1]f}{x_2 - x_1} = \frac{0-1}{1-0} = -1 \\
[x_2, x_3]f &= \frac{[x_3]f - [x_2]f}{x_3 - x_2} = \frac{2-0}{2-1} = 2 \\
[x_0, x_1, x_2]f &= \frac{[x_1, x_2]f - [x_0, x_1]f}{x_2 - x_0} = \frac{-1-0}{1-(-1)} = -\frac{1}{2} \\
[x_1, x_2, x_3]f &= \frac{[x_2, x_3]f - [x_1, x_2]f}{x_3 - x_1} = \frac{2-(-1)}{2-0} = \frac{3}{2} \\
[x_0, x_1, x_2, x_3]f &= \frac{[x_1, x_2, x_3]f - [x_0, x_1, x_2]f}{x_3 - x_0} = \frac{\frac{3}{2}-(-\frac{1}{2})}{2-(-1)} = \frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

	$[x_i]f$		$[x_i, x_{i+1}]f$		$[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]f$		$[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]f$
-1	1						
		>	0				
0	1			>	$-\frac{1}{2}$		
		>	-1			>	$\frac{2}{3}$
1	0			>	$\frac{3}{2}$		
		>	2				
2	2						

Hier lässt sich das Interpolationspolynom ablesen:

$$P(f|x_0, x_1, x_2, x_3) = 1 + 0 \cdot (x+1) - \frac{1}{2}(x+1)x + \frac{2}{3}(x+1)x(x-1)$$

Zur effizienteren Auswertung sollte man das Polynom direkt horner-artig Aufschreiben:

$$P\left(f|x_0, x_1, x_2, x_3\right) = 1 + (x+1)\left(0 + x\left(-\frac{1}{2} + (x-1)\,\frac{2}{3}\right)\right)$$

Zur Kontrolle rechnen wir die Potenzform aus und erhalten

$$P\left(f|x_0, x_1, x_2, x_3\right) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{6}x + 1$$

Eigenschaften Newton-Schema:

- Aufwand allgemein: $\frac{1}{2}n^2$ um die Koeffizienten $[x_1, ...x_j]f$ zu berechnen. Zusätzlich n Multiplikationen für jede Auswertung.

- weitere Stützstellen können leicht hinzugefügt werden.
- Stützstellen müssen nicht sortiert sein.

Fehlerabschätzung:

Wir möchten den Fehler $|f(x^*) - P(f|x_0, .., x_n)(x^*)|$ (a priori) abschätzen für beliebige $x^* \in \mathbb{R}$.

Herleitung Fehler in x^*:

Hierzu betrachten wir das Interpolationspolynom $p^*(x) = P(f|x_0, .., x_n, x^*)(x)$. Dann kann man den Fehler auch wie folgt charakterisieren:

$$|f(x^*) - P(f|x_0, .., x_n)(x^*)| = |\underbrace{p^*(x^*)}_{=f(x^*)} - P(f|x_0, .., x_n)(x^*)|$$

Jetzt setzen wir die Newton-Darstellung ein und erhalten:

$$|f(x^*) - P(f|x_0, .., x_n)(x^*)| = \underbrace{|(x^* - x_0)(x - x_1) \cdots (x^* - x_n)|}_{=A} \cdot \underbrace{|[x_0, .., x_n, x^*]f|}_{=B}$$

Die beiden Terme A und B können getrennt voneinander betrachtet werden. A hängt nicht von der Funktion, sondern lediglich von der Wahl der Stützstellen ab. B kann weiter charakterisiert werden (s. $\boxed{\text{Folie 8.16}}$):

$$B = [x_0, ..., x_n, x^*]f = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

wobei $\xi \in [\min\{x_i, x^*\}, \max\{x_i, x^*\}]$

Abschätzungen

Bei Auswertung im Interval $[c, d]$

Typischerweise ist man an dem *maximalen* Fehler innerhalb eines Intervals $[c, d]$ interessiert. Das Interval $[a, b]$ ist dabei durch die Stützstellen mit $a = \min\{x_i\}$ und $b = \max\{x_i\}$ definiert. Dann gilt (mit $[c, d] \subset [a, b]$ oder $[a, b] \subset [c, d]$):

$$\max_{x \in [c,d]} |f(x) - P(f|x_0, .., x_n)(x)| \leq \max_{x \in [c,d]} \left| \prod_{j=0}^{n} (x - x_j) \right| \cdot \max_{\xi \in [a,b] \cup [c,d]} \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \right|$$

$[a, b]$: Hier wird interpoliert
$[c, d]$: Hier wird ausgewertet / Polynom betrachtet
Die Unterscheidung zwischen den Intervallen ist nicht notwendig, kann aber schärfere (d.h. weniger pessimistische) Abschätzungen liefern, als wenn man bloß das größere Interval für beide Terme (A und B) betrachtet.

Gröbere (und einfachere) Abschätzung erhält man für den A-Term, wenn man einzeln abschätzt:

$$\max_{x\in[c,d]} \left| \prod_{j=0}^{n} (x - x_j) \right| \leq \prod_{j=0}^{n} \max_{x\in[c,d]} |x - x_j|$$

Bei Auswertung im Punkt $\bar{x}$

Im Falle einer Punktauswertung fällt das Intervall $[c, d]$ zu dem Punkt $\bar{x}$ zusammen und man erhält:

$$|f(x) - P(f|x_0, .., x_n)(\bar{x})| \leq \left| \prod_{j=0}^{n} (\bar{x} - x_j) \right| \cdot \max_{\xi\in[\bar{a},\bar{b}]} \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \right|$$

wobei das Interval $[a, b]$ ggf. soweit vergrößert wird, dass es $\bar{x}$ beinhaltet: $\bar{a} = \min\{a, \bar{x}\}$ und $\bar{b} = \max\{b, \bar{x}\}$

Zusätzliches Beispiel:

Aufgabe 4 aus Klausur Herbst 2011.

Verwendete VF:

VF-11 Herbst 2011.