14. Großübung

Anfangswertprobleme gewöhnlicher Differentialgleichungen (II)

Fehlerbetrachtungen für Einschrittverfahren:

Einschrittverfahren (ESV):

Eindeutige Vorschrift von ESV:

$$\Psi_f : \quad (t_j, y^j, h_j) \to y^{j+1}.$$

z.B. Euler-Verfahren (explizit): $\Psi_f(t_j, y^j, h_j) = y^j + h_j f(t_j, y^j)$. Bei impliziten Verfahren wird Ψ_f nicht durch eine explizite Funktion beschrieben.

Umformung:

$$y^{j+1} = \Psi_f(t_j, y^j, h_j) = y^j + h_j \left(\frac{\Psi_f(t_j, y^j, h_j) - y^j}{h_j} \right) =: y^j + h_j \Phi_f(t_j, y^j, h_j).$$

wobei Φ_f heißt Verfahrens- oder Inkrement-Vorschrift.

Konvergenz

Näherungswerte: y^j an den Stellen t_j, $j = 0, \cdots, n$ $(t_n = T)$.
Notieren wir $y_h(t_j) = y^j$, $j = 0, \cdots, n$.
Definieren wir globale Diskretisierungsfehler :

$$e_h(t_j) = y(t_j) - y_h(t_j), \quad j = 0, \cdots, n.$$

Typischerweise ist man an dem maximalen Fehler für $h \to 0$ interessiert.

$$\|y - y_h\|_\infty := \max_{j=0,\cdots,n} \|e_h(t_j)\|.$$

Definition von Konvergenzordnung eines Verfahrens:

$\boxed{\text{Folie 11.27}}$

Der globale Fehler $e_h(t_j)$ entsteht durch eine Akkumulation von lokalen Fehlern an den Stellen $t_0, t_1, \cdots, t_{j-1}$.

Lokaler Abbruchfehler und Konsistenz:

$y(t; t_a, y^a)$ bezeichnet die Lösung des Anfangswertproblems:

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_a) = y^a.$$

Nach einem Schritt, das ESV liefert

$$y_h(t_a + h; t_a, y^a) = y^a + h\Phi_f(t_a, y^a, h).$$

Der lokale Abbruchfehler im Intervall $[t_a, t_a + h]$ wird definiert durch

$$\delta(t_a, y^a, h) := \underbrace{y(t_a + h; t_a, y^a)}_{\text{Exakte Lösung}} - \underbrace{y_h(t_a + h; t_a, y^a)}_{\text{Resultat von ESV}}.$$

Bemerkung: Die Wahl von $(t_a, y^a) = \big(t_j, y(t_j)\big)$ (oder $(t_a, y^a) = (t_j, y^j)$) ist unwesentlich. Für eine theoretische Konvergenzanalyse ist $(t_a, y^a) = (t_j, y(t_j))$ bequem, und $(t_a, y^a) = (t_j, y^j)$ ist besser geeignet für Schätzungen des lokalen Abbruchfehlers in der Praxis.

Konsistenzfehler:

$$\tau(t_a, y^a, h) := \frac{\delta(t_a, y^a, h)}{h} = \frac{y(t_a + h; t_a, y^a) - y_h(t_a + h; t_a, y^a)}{h}$$

Kurzschreibweise im Fall $(t_a, y^a) = \big(t_j, y(t_j)\big)$:

$$\tau_{j,h} = \frac{\delta_{j,h}}{h} = \frac{y(t_{j+1}) - y_h(t_{j+1}; t_j, y(t_j))}{h}$$

Konsistenzordnung eines Verfahrens:

$\boxed{\text{Folie 11.33}}$

Bemerkung: Das Verfahren $y_h(\cdot)$ heißt konsistent, falls $p \geq 1$ für eine hinreichend große Klasse von Funktionen f und entsprechenden Anfangswertproblemen gilt.

Bemerkung: Aus Konsistenz und Konsistenzordnung p folgt Konvergenz und Konvergenzordnung p, wenn das Verfahren *stabil* ist und das Problem hinreichend glatt (Lipschitz-Bedingung).

Beispiel 1: Lokaler Abbruchfehler und Konsistenzfehler

Wählen jetzt $(t_a, y^a) = (0.5, y(0.5))$, wobei $y(\frac{1}{2}) = \frac{5}{3}$, und $n_i = 2^{i+1}$, $i = 0, 1, 2, ...$ $(h_i = \frac{T-t_0}{n_i})$.
Für $t_a + h_i$ aufgrund der Eindeutigkeit

$$y(t_a + h_i; t_a, y^a) = y(t_a + h_i)$$

gilt.

Euler explizit:

- **Lokaler Abbruchfehler**

$$\begin{aligned} h_0 = \frac{1}{2}: \quad \delta(t_a, y^a, h_0) &= y(t_a + h_0; t_a, y^a) - y_h(t_a + h_0; t_a, y^a) \\ &= y(t_a + h_0) - (y^a + h_0 \cdot f(t_a, y^a)) \\ &= y(0.5 + 0.5) - \left(\frac{5}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \frac{5}{3}}{1 + \frac{1}{2}} \right) \\ &= 0.05555... \end{aligned}$$

- **Konsistenzfehler**

$$h_0 = \frac{1}{2}: \quad \tau(t_a, y^a, h_0) = \frac{\delta(t_a, y^a, h_0)}{h_0} = \frac{0.05555...}{0.5} = 0.1111...$$

h_i	$\delta(t_a, y^a, h_i)$	$\tau(t_a, y^a, h_i)$
$h_0 = \frac{1}{2}$	0.0555556	0.111111
$h_1 = \frac{1}{4}$	0.0158730	0.0634921
$h_2 = \frac{1}{8}$	0.00427350	0.0341880
$h_3 = \frac{1}{16}$	0.00111111	0.0177778

Tabelle 1: Euler explizit

Verbesserter Euler (explizit):

- **Lokaler Abbruchfehler**

$$h_0 = \frac{1}{2}: \quad \delta(t_a, y^a, h_0) = y(t_a + h_0; t_a, y^a) - y_h(t_a + h_0; t_a, y^a)$$
$$= y(t_a + h_0) - \left(y^a + h_0 f\left(t_a + \frac{h_0}{2}, y^a + \frac{h_0}{2} f(t_a, y^a)\right)\right)$$
$$= y(0.5 + 0.5) - \left(\frac{5}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{5}{3} + \frac{1}{4} \cdot f(0.5, \frac{5}{3})\right)}{1 + (\frac{1}{2} + \frac{1}{4})}\right)$$
$$= -0.00793650...$$

- **Konsistenzfehler**

$$h_0 = \frac{1}{2}: \quad \tau(t_a, y^a, h_0) = \frac{\delta(t_a, y^a, h_0)}{h_0} = \frac{-0.00793651}{0.5} = -0.0158730...$$

h_i	$\delta(t_a, y^a, h_i)$	$\tau(t_a, y^a, h_i)$
$h_0 = \frac{1}{2}$	-0.00793651	-0.0158730
$h_1 = \frac{1}{4}$	-0.00122100	-0.00488400
$h_2 = \frac{1}{8}$	-1.70940×10^{-4}	-0.00136752
$h_3 = \frac{1}{16}$	-2.26757×10^{-5}	-3.62812×10^{-4}

Tabelle 2: Verbesserter Euler

Generelle Probleme

Wir betrachten zum Abschluss noch ein paar Klausuraufgaben mit Schwerpunkten im Verständnis.

- Klausur Frühling 2012 A1 a), evtl. auch Frühling 2011 A1 a),
- Klausur Herbst 2012 A3 (größtenteils nur a)),
- Klausur Frühling 2012 A3 (Schwerpunkt a)),
- Klausur Herbst 2012 A4 (Schwerpunkt d)),
- Klausur Herbst 2010 A4 (nur a))