5. Großübung

1 Cholesky-Zerlegung

Folie 3.51,3.53: spd

$$\text{Beispiel:} \quad x^T I x = x^T x = ||x||_2^2 > 0, \quad \text{falls} \quad x \neq 0.$$
$$x^T A x = x^T \lambda x = \lambda ||x||_2^2 > 0, \quad \text{falls} \quad \lambda > 0, x \neq 0.$$

Folie 3.54: LDL^T

$$A \text{ spd} \Leftrightarrow A = LDL^T \text{ (eindeutig) mit } d_{j,j} > 0 \ \forall j = 1, ..., n$$

Berechnung von LDL^T : s. Folie 3.55,3.56,3.57

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -8 \\ 6 & 19 & -22 \\ -8 & -22 & 39 \end{pmatrix}$$

Überprüfung A s.p.d:

- A symmetrisch ? $\rightarrow$ Ja.
- A pos. definit?
  Ja, wenn Cholesky durchführbar und $d_{j,j}$>0 für $j = 1, .., n$. aber: aufwendig, prüfe daher zunächst:
  - $a_{k,k} > 0 \quad \forall k$? [Satz3.33 (v)]
  - liegt der betragsmäßig größte Matrixeintrag auf der Hauptdiagonalen?

Spaltenweise inklusive D berechnen:

1.Spalte ($k = 1$):

$$d_{1,1} = a_{1,1} = 2$$
$$l_{2,1} = \frac{a_{2,1}}{d_{1,1}} = \frac{6}{2} = 3$$
$$l_{3,1} = \frac{a_{3,1}}{d_{1,1}} = \frac{-8}{2} = -4$$

2.Spalte ($k = 2$):

$$d_{2,2} = a_{2,2} - \sum_{j=1}^{1} l_{2,j}^2 d_{j,j} = 19 - 3^2 \cdot 2 = 1$$

$$l_{3,2} = \frac{a_{3,2} - \sum_{j=1}^{1} l_{3,j} d_{j,j} l_{2,j}}{d_{2,2}} = \frac{-22 - (-4) \cdot 2 \cdot 3}{1} = 2$$

3.Spalte($k = 3$):

$$d_{3,3} = a_{3,3} - \sum_{j=1}^{2} l_{3,j}^2 d_{j,j} = 39 - ((-4)^2 \cdot 2 + 2^2 \cdot 1) = 3$$

Daraus folgt dann:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Lösen von $Ax = b$:

$$\begin{aligned} &i)\ A = LDL^T \\ &ii)\ Ly = b \\ &iii)\ L^T x = D^{-1} y \end{aligned}$$

Beispiel: $Ax = b$

Löse $Ax = b$ mit $b = \begin{pmatrix} -10 \\ -29 \\ 45 \end{pmatrix}$

$Ly = b$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} -10 \\ -29 \\ 45 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow y_1 = -10, \\ &\Rightarrow y_2 = -29 - 3 \cdot (-10) = 1, \\ &\Rightarrow y_3 = 45 - (-4) \cdot (-10) - 2 \cdot 1 = 3 \end{aligned}$$

$L^T x = D^{-1} y$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -10 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow x_1 = -5 - (-4) \cdot 1 - 3 \cdot (-1) = 2, \\ &\Rightarrow x_2 = 1 - 2 \cdot 1 = -1, \\ &\Rightarrow x_3 = 1 \end{aligned}$$

Berechnung Determinante von A:

$$det(A) = det(LDL^T) = \underbrace{det(L)}_{=1} det(D) \underbrace{det(L^T)}_{=1} = det(D) = \prod_{i=1}^{n} d_{i,i}$$

Beispiel: Determinante

$$det(A) = det(D) = 2 \cdot 1 \cdot 3 = 6$$

Vorteile Cholesky-Zerlegung:

- Aufwand: $\frac{1}{6}n^3$ bei optimaler Implementierung
(klar halb so groß wie LR: $\frac{1}{3}n^3$)

- keine Pivotisierung notwendig, da $a_{k,k} > 0$ ohnehin erfüllt

Stabilität:

- Cholesky Verfahren: stabil.
- Gauß mit Spaltenpivotisierung: stabil.
- Gauß *ohne* Pivotisierung: *nicht* stabil.

VF von Klausur: VF-4 H 2011

2 QR Zerlegung

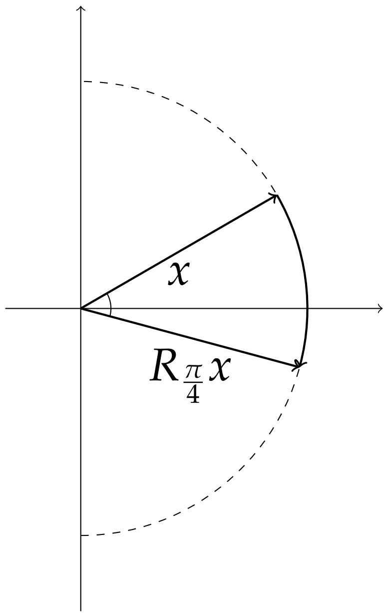
Folie 3.67, 3.68: Orthogonale Matrizen
Eine Matrix $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt orthogonal, falls

$$Q^T Q = QQ^T = I.$$

Die Inverse von Q ist $Q^{-1} = Q^T$.
Beispiel: Drehmatrix in $\mathbb{R}^2$

$$R_\phi = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$
$$R_\phi^T = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$
$$R_\phi^T R_\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

skizze $||R_\phi||_2$.



Eigenschaften von Q:

(i) Q^T ist orthogonal.
$$(Q^T)^T = (Q^{-1})^T = (Q^T)^{-1}$$

(ii) $||Qx||_2 = ||x||_2$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. (nur für $||\cdot||_2$)
$$||Qx||_2 = \sqrt{x^T Q^T Q x} = \sqrt{x^T x} = ||x||_2$$
Daraus folgt $||Q||_2 = ||Q^T||_2 = 1$. (Operatornorm)

(iii) $\kappa_2(Q) = 1$.
$$\kappa_2(Q) = ||Q||_2 ||Q^{-1}||_2 = 1$$

(iv) $\forall A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ bzw. $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \in \mathbb{N}$, gilt $||A||_2 = ||QA||_2 = ||AQ||_2$. (nur für $||\cdot||_2$)

(v) Es gilt (für A wie vorhin) $\kappa_2(A) = \kappa_2(QA) = \kappa_2(AQ)$.

(vi) Sei $\tilde{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ orthogonal, dann ist $Q\tilde{Q}$ orthogonal.
$$(Q\tilde{Q})^T Q\tilde{Q} = \tilde{Q}^T Q^T Q \tilde{Q} = \tilde{Q}^T \tilde{Q} = I$$

QR-Zerlegung

Folie 3.77
Als QR-Zerlegung wird die Zerlegung

$$A = QR,$$

der Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ in die rechte obere Dreiecksmatrix $R \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und die orthogonale Matrix $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ bezeichnet.
Die Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$ kann in der Form

$$\begin{aligned} Ax &= QRx = b \\ \Rightarrow Rx &= Q^{-1}b = Q^T b \end{aligned}$$

durch Rückwärtseinsetzen gewonnen werden. Die rechte Seite $Q^T b$ wird im Laufe der QR-Zerlegung gewonnen. Eine explizite Bestimmung der Matrix Q ist daher i.d.R. nicht erforderlich.
Givens-Rotationen:
Grundaufgabe:
Das Prinzip der Givens-Rotationen beruht darauf, die Spalten von A schrittweise durch Drehungen in die (wahlweise positive oder negative) Richtung der Einheitsvektoren des Koordinatensystems abzubilden, wodurch in den Spaltenvektoren entsprechende Nulleinträge entstehen. Ggfs. wird die rechte Seite b ebenfalls mitbehandelt.
Die Grundaufgabe der Givens-Rotationen besteht folglich darin, eine orthogonale Matrix G zu finden, welche den gegebenen Spaltenvektor $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ in Richtung des Einheitsvektors e^1 abbildet.

$$G \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix}$$

r entspricht, ggfs. mit abweichendem Vorzeichen, der euklidische Länge des Vektors $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $r = \pm\sqrt{a^2+b^2}$, $r \in \mathbb{R}$.
Wie im Folgenden gezeigt wird, kann die Matrix G durch die Drehmatrix

$$G = \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

beschrieben werden.
Bemerkung: In der Praxis ist es nicht nötig den Drehwinkel ϕ explizit zu bestimmen. Es müssen nur Werte für c und s bestimmt werden.
Anwendung: Die Givens-Rotationsmatrizen $G_{i,k}$ entstehen durch Einbettung ebener Drehungen in $m \times m$-Matrizen (s. Beispiel). Die Anwendung auf den (zur Bestimmung der Rotationsmatrix verwendeten) Spaltenvektor von A erzeugt eine Null in der k-ten Zeile.
Die Givens-Rotationsmatrizen müssen auf alle Spaltenvektoren von A und ggfs. b angewendet werden. Es gilt:

$$\begin{aligned} G_{i_N,k_N} \cdot \ldots \cdot G_{i_1,k_1} \cdot A = R \\ \Rightarrow A = G_{i_1,k_1}^T \cdot \ldots \cdot G_{i_N,k_N}^T \cdot R = QR \end{aligned}$$

Der Aufwand der Givens-Rotationen beträgt $\frac{4}{3}n^3$ Operationen für ein vollbesetztes $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
Beispiel 1:

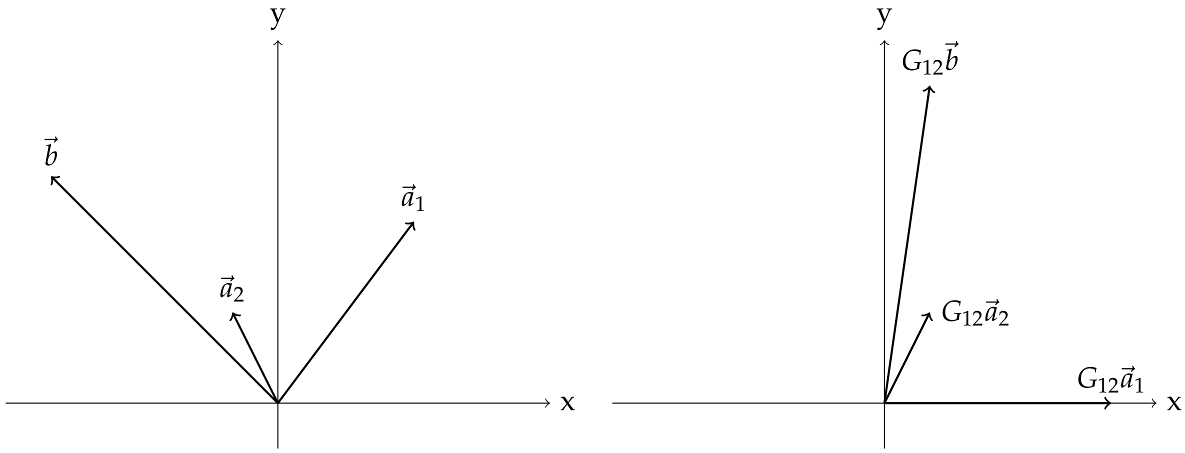
$$[A|b] = \left[\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & -5 \\ 4 & 2 & 5 \end{array}\right]$$

$$a = 3,\ b = 4,\ r = \sqrt{a^2+b^2} = 5,\ c = \frac{a}{r} = 0.6,\ s = \frac{b}{r} = 0.8$$

$$G_{12} = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.8 \\ -0.8 & 0.6 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow G_{12}\,[A|b] = \left[\begin{array}{cc|c} 5 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \end{array}\right]$$

skizze: $\vec{a}_1 = (3,4)^T$, $\vec{a}_2 = (-1,2)^T$, $\vec{b} = (-5,5)^T$.



Beispiel 2:

$$[A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 5 & -5 \\ 4 & 2 & -3 & 5 \\ -2 & 6 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$$a = 3,\ b = 4,\ r = \sqrt{a^2+b^2} = 5,\ c = \frac{a}{r} = 0.6,\ s = \frac{b}{r} = 0.8$$

$$G_{12} = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.8 & 0 \\ -0.8 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow G_{12}\,[A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & 0.6 & 1 \\ 0 & 2 & -5.8 & 7 \\ -2 & 6 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$$a = 5,\ b = -2,\ r = \sqrt{29},\ c = \frac{a}{r} = 0.9285,\ s = \frac{b}{r} = -0.3714$$

$$G_{13} = \begin{pmatrix} 0.9285 & 0 & -0.3714 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.3714 & 0 & 0.9285 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow G_{13}G_{12}\,[A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 5.385 & -1.3 & 0.1857 & -0.1857 \\ 0 & 2 & -5.8 & 7 \\ 0 & 5.942 & 1.151 & 3.157 \end{array}\right]$$

$$a = 2,\ b = 5.942,\ r = 6.270,\ c = \frac{a}{r} = 0.3190,\ s = \frac{b}{r} = 0.9477$$

$$G_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3190 & 0.9477 \\ 0 & -0.9477 & 0.3190 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow G_{23}G_{13}G_{12}\,[A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 5.385 & -1.3 & 0.1857 & -0.1857 \\ 0 & 6.270 & -0.7594 & 5.225 \\ 0 & 0 & 5.864 & -5.627 \end{array}\right]$$

Lösen durch Rückwärtseinsetzen:

$$\rightarrow x_3 = -0.9596,\ x_2 = 0.7171,\ x_1 = 0.1717$$

Bemerkung: In der Praxis ist das explizite Aufstellen der Rotationsmatrizen G_{ik} nicht erforderlich. Es genügt die Werte für c und s zu kennen, um diese, ohne formale Matrix-Matrix-Multiplikation, anzuwenden.

Zusammenfassung

- Das Verfahren ist sehr stabil. Pivotisierung ist nicht erforderlich.
- Der Aufwand für die QR-Zerlegung einer vollbesetzten $m \times n$ Matrix über Givens-Rotationen beträgt etwa $\frac{4}{3}n^3$ Operationen.

VF von Klausur VF-5 H 2011.