7. Großübung

Lineare Ausgleichsrechnung: Lösung über QR-Zerlegung

$\|Ax - b\|_2 \overset{\text{Q orth.}}{=} \|Q^T(Ax-b)\|_2 \overset{A=QR}{=} \|Q^TQRx - Q^Tb\|_2 = \|Rx - \tilde{b}\|_2 \to \min\limits_{x\in\mathbb{R}^n}$

$$\left\| \begin{array}{c} \\ 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ n \\ n+1 \\ \vdots \\ m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & \cdots & \cdots & \cdots & n \end{array} \\ \begin{pmatrix} * & * & * & \cdots & * \\ 0 & * & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & * \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array} \vec{x} - \begin{pmatrix} * \\ * \\ * \\ \vdots \\ * \\ * \\ \vdots \\ * \end{pmatrix} \right\|_2 \to \min_{\vec{x}\in\mathbb{R}^n}$$

Fehler in Zeilen 1 bis n können durch Rückwärtseinsetzen eliminiert werden ($R_1x = \tilde{b}_1 \Rightarrow x^*$). Der Fehler in den Zeilen $n+1$ bis m ist damit der Gesamtfehler (Residuum).

$$\|Ax^* - b\|_2 = \|\tilde{b}_2\|_2$$

Bemerkung:

- Aufwand: $m{\cdot}n^2$ ($m \gg n$), d.h. doppelt so groß wie bei Normalgleichung.
- Kondition: $\kappa_2(Q^TA) = \kappa_2(A)$ unverändert.
- Q wird nicht explizit bestimmt!

VF: VF-6, H2011.

Beispiel 1 : Gegeben seien Messwerte

t_i	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
y_i	0.25	0.8	-0.1	-0.75

die zu dem Bildungsgesetz

$$y = \alpha\cos(t) + \beta\sin(t)$$

gehören.

Unbekannte: $x = \begin{pmatrix}\alpha & \beta\end{pmatrix}^T$,

Matrix aufstellen: $A = \begin{pmatrix} \cos(0) & \sin(0) \\ \cos(\frac{\pi}{2}) & \sin(\frac{\pi}{2}) \\ \cos(\pi) & \sin(\pi) \\ \cos(\frac{3\pi}{2}) & \sin(\frac{3\pi}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Rechte Seite: $b_i = y(t_i) \to b = \begin{pmatrix}0.25 & 0.8 & -0.1 & -0.75\end{pmatrix}^T$.

Lineares Ausgleichsproblem:

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x - \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.8 \\ -0.1 \\ -0.75 \end{pmatrix} \right\|_2 \to \min_{x\in\mathbb{R}^2}$$

I) Normalgleichungen:

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^T b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.8 \\ -0.1 \\ -0.75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.35 \\ 1.55 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 0.35 \\ 0 & 2 & 1.55 \end{array}\right] \Rightarrow x = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.175 \\ 0.775 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow y(t) = 0.175\cos(t) + 0.775\sin(t)$$

II) QR-Zerlegung:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0.25 \\ 0 & 1 & 0.8 \\ -1 & 0 & -0.1 \\ 0 & -1 & -0.75 \end{array}\right]$$

$$a = 1,\ b = -1,\ r = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{2} = 1.414,\ c = \frac{a}{r} = 0.7071,\ s = \frac{b}{r} = -0.7071$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1.414 & 0 & 0.2475 \\ 0 & 1 & 0.8 \\ 0 & 0 & 0.1061 \\ 0 & -1 & -0.75 \end{array}\right]$$

$$a = 1,\ b = -1,\ r = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{2} = 1.414,\ c = \frac{a}{r} = 0.7071,\ s = \frac{b}{r} = -0.7071$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1.414 & 0 & 0.2475 \\ 0 & 1.414 & 1.096 \\ 0 & 0 & 0.1061 \\ 0 & 0 & 0.03536 \end{array}\right].$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1.414 & 0 & 0.2475 \\ 0 & 1.414 & 1.096 \end{array}\right] \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 0.175 \\ 0.775 \end{pmatrix},$$

$$\text{Residuum}: \min_{x\in\mathbb{R}^2} \|Ax-b\|_2 = \sqrt{0.1061^2 + 0.03536^2} = 0.1118$$

Probe: Residuum bei Normalgleichungen:

$$\min_{x\in\mathbb{R}^2} \|Ax-b\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.175 \\ 0.775 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.8 \\ -0.1 \\ -0.75 \end{pmatrix} \right\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} -0.075 \\ -0.025 \\ -0.075 \\ -0.025 \end{pmatrix} \right\|_2 = 0.1118$$

Beispiel 2 :
Aufgabe 2 2011 H.

Zusammenfassung: Lineare Gleichungssysteme

Lösungsverfahren:

Verfahren	Zerlegung	Pivotisierung	Stabilität	Kosten	Bemerkung
LR	$A = LR$	nein	instabil	$\mathcal{O}(\frac{1}{3}n^3)$	$\det(A) \neq 0$, Pivotelement> 0.
LR mit Pivotisierung	$PA = LR$	ja	stabil	$\mathcal{O}(\frac{1}{3}n^3)$	$\det(A) \neq 0$.
Cholesky	$A = LDL^T$	nein	stabil	$\mathcal{O}(\frac{1}{6}n^3)$	A s.p.d.
QR-Zerlegung	$A = QR$	nein			auch für $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$
- Givens		nein	stabil	$\mathcal{O}(\frac{4}{3}n^3)$	-Vorteil wenn A dünn besetzt
- Householder		nein	stabil	$\mathcal{O}(\frac{2}{3}n^3)$	- Spiegelung "$sign(y_1)$"

Skalierung: $\mathcal{O}(n^2)$, Vorwärts-/Rückwärtseinsetzen: $\mathcal{O}(\frac{1}{2}n^2)$.

Kontraktivität

Dies ist eigentlich nur eine Wiederholung aus Höherer Mathematik. Diese Eigenschaft ist wichtig zur Behandlung der Lösung von nichtlinearen Gleichungen/Gleichungssytemen im Zusammenhang mit dem Banachschen Fixpunktsatz.

Definition Kontraktivität

Sei eine Funktion $\Phi : A \to A$ und $A \subseteq X$ (X ein linearer normierter Raum [z.B. $\mathbb{R}^n$]). Dann heißt Φ kontraktiv (bzgl. der Norm $\|\cdot\|_X$) auf A, wenn für $x, y \in A$ gilt:

$$\|\Phi(y) - \Phi(x)\|_X \leq L\|y - x\|_X \tag{$*$}$$

mit $L < 1$.

D. h. Abstände zwischen x und y werden nach Abbildung auf $\Phi(x)$ und $\Phi(y)$ verkleinert.

Beispiele für A:

1. $A = \mathbb{R} = X$
2. $A = \mathbb{R}^n = X$
3. $A = [a, b] \times [c, d], \quad X = \mathbb{R}^2$

Beispiele für Φ:

Bsp. 1: $\Phi(x) = x, X = \mathbb{R}, \|\cdot\| = |\cdot|$

$$|\Phi(x) - \Phi(y)| = |x - y| \overset{!}{\leq} L|x - y|$$

Offensichtlich ist $L = 1$ und nicht $L < 1$
$\Rightarrow \Phi$ is nicht kontraktiv (auf $\mathbb{R}$).

Bsp. 2: $\Phi(x) = e^{-x}, A = [0.1, 1], \|\cdot\| = |\cdot|$.

$$|\Phi(x) - \Phi(y)| = |e^{-x} - e^{-y}|$$

Φ ist stetig diff'bar also können wir den MWS anwenden:

> Mittelwertsatz (gilt nur für skalare stetig diff'bare Funktionen):
> $\Phi(x) - \Phi(y) = \Phi'(\xi)(x-y)$ für ein $\xi \in (x,y)$

Hier gilt nach MWS

$$|\Phi(x) - \Phi(y)| = |e^{-x} - e^{-y}| = |-e^{-\xi}||x-y|$$

Abschätzung für $|-e^{-\xi}|$:

$$|-e^{-\xi}| \leq \max_{s\in A} |-e^{-s}| = e^{-\frac{1}{10}}|x-y|$$

Offensichtlich gilt $(*)$ mit $L = e^{-\frac{1}{10}}$
$\Rightarrow \Phi$ is kontraktiv auf $[0.1, 1] = A$.

Bsp. 3a: $A = [-1,1] \times [-1,1] \subseteq \mathbb{R}^2 = A$, $\|\cdot\| = \|\cdot\|_1$

$$\Phi(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}sin(x_1 + x_2) \\ \frac{1}{6}x_1^2 + 1 \end{pmatrix}$$

Mit $y = (y_1, y_2)$, $z = (z_1, z_2)$,

$$\begin{aligned}
\|\Phi(y) - \Phi(z)\|_1 &= \\
&= \left\| \begin{pmatrix} \frac{1}{2}sin(y_1+y_2) & - & \frac{1}{2}sin(z_1+z_2) \\ \frac{1}{6}y_1^2 + 1 & - & (\frac{1}{6}z_1^2+1) \end{pmatrix} \right\|_1 \\
&\overset{(**)}{=} \left\| \begin{pmatrix} \frac{1}{2}cos(\xi)(y_1+y_2-z_1-z_2) \\ \frac{1}{6}(y_1-z_1)\cdot(y_1+z_1) \end{pmatrix} \right\|_1 \\
&= \frac{1}{2}\underbrace{|cos(\xi)|}_{\leq 1}\cdot|(y_1-z_1)+(y_2-z_2)| + \frac{1}{6}\underbrace{|y_1+z_1|}_{\leq 2}\cdot|y_1-z_1| \\
&\leq \frac{1}{2}\left\| \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \right\|_1 + \frac{1}{6}\cdot 2 \cdot \left\| \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \right\|_1 \\
&\leq \frac{5}{6}\|y-z\|_1
\end{aligned}$$

$(**)$ $\quad$ sin stetig diff'bar $\rightarrow$ MWS: $sin(b) = sin(a) + cos(\xi)(b-a)$ $\quad$ mit $\xi \in (a,b)$.

wobei hier $a = y_1 + y_2$ und $b = z_1 + z_2$.

$\Rightarrow \Phi$ is kontraktiv auf A bzgl $\|\cdot\|_1$ mit $L = \frac{5}{6}$.

Vereinfachung mit Ableitung (gilt nur wenn A konvex ist!)

Wenn A ein konvexes Gebiet ist (d.h. Verbindungsstrecken zwischen Punkten aus A liegen auch komplett in A), dann gilt folgendes hinreichendes Kriterium:

> Wenn A abgeschlossen und konvex und $\max_{s\in A} \|\Phi'(s)\| \leq L$ mit $L < 1$, dann gilt
>
> $$\|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq \max_{s\in A} \|\Phi'(s)\| \|x - y\| \leq L\|x - y\|$$
>
> mit $L < 1$.

Beweis:
Verwende MWS für skalare Funktionen:

$$g(t) = \Phi(x + t(y - x)) - \Phi(x)$$

Dann ist

$$g(1) = \Phi(y) - \Phi(x)$$

Und aus dem MWS für die skalare Funktion g folgt:

$$g(1) = \underbrace{g(0)}_{=0} + g'(\xi) \underbrace{(1 - 0)}_{=1} \qquad \text{für ein } \xi \in (0, 1)$$

$$\|g(1)\| \leq \max_{\xi\in(0,1)} \|g'(\xi)\|$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} \|\Phi(y) - \Phi(x)\| & \\ &= \|g(1)\| \\ &\leq \max_{\xi\in(0,1)} \|g'(\xi)\| \\ &= \max_{\xi\in(0,1)} \|\Phi'(x + \xi(y - x)) \cdot (y - x)\| \\ &\leq \max_{s\in A} \|\Phi'(s)\| \| \cdot (y - x)\| \end{aligned}$$

Wiederholung des Beispiels 3

Bsp. 3b:

$$\Phi'(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}cos(x_1 + x_2) & \frac{1}{2}cos(x_1 + x_2) \\ \frac{1}{3}x_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
\|\Phi'(x_1,x_2)\| &= \max\{\frac{1}{2}|cos(x_1+x_2)| + \frac{1}{3}|x_1|, |\frac{1}{2}cos(x_1+x_2)|\} \\
&= \frac{2}{3}|cos(x_1+x_2)| + \frac{1}{3}|x_1| \le \frac{5}{6}
\end{aligned}
$$

Bsp. 3b funktioniert mit der Jakobi-Matrix nur, weil A konvex war. Wir betrachten jetzt ein Beispiel, bei dem das nicht der Fall ist.

Bsp. 4: $A = [-1,1] \times [-1,1] \setminus \{(x,0), x \ge 0\}$, $\|\cdot\| = \|\cdot\|_1$,

$$
\Phi(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ f_2(x_1,x_2) \end{pmatrix}, \qquad f_2(x_1,x_2) = \begin{cases} 0 & , x_1 \le 0 \\ \frac{1}{4}x_1^2 sign(x_2) & , x_1 > 0 \end{cases}
$$

Dann gilt

$$
\Phi'(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \pm\frac{1}{2}x_1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \max_{x \in A} \|\Phi'(x)\|_1 = \frac{1}{2}
$$

Beachte: Φ ist stetig diff'bar auf A. Wähle $n = 2$. Es gilt aber ($\varepsilon < \frac{1}{4}$):

$$
\|\Phi(1,\varepsilon) - \Phi(1,-\varepsilon)\|_1 = \frac{1}{4}\left\|\begin{pmatrix} 0 \\ 1-(-1) \end{pmatrix}\right\|_1 = \frac{1}{2} > 2\varepsilon = \left\|\begin{pmatrix} 0 \\ 2\varepsilon \end{pmatrix}\right\|_1 = \left\|\begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -\varepsilon \end{pmatrix}\right\|_1
$$

Weil A nicht konvex ist, handelt es sich nicht um eine Kontraktion, obwohl die Norm der Ableitung kleiner als 1 ist.

weitere Beispiele:

Klausur Frühling 2011: Entsprechende Teile von Aufgabe 2a) bzgl. Kontraktivität.
Klausur Herbst 2012: Entsprechende Teile von Aufgabe 3a) bzgl. Kontraktivität.