Numerische Mathematik I für Ingenieure SS14
Verständnisfragen – Hausübung 2

VF-1: Es seien x_{MIN} bzw. x_{MAX} die kleinste bzw. größte (strikt) positive Zahl sowie eps die relative Maschinengenauigkeit in der Menge $\mathbb{M}(b, m, r, R)$ der Maschinenzahlen gemäß Vorlesung/Buch und $\mathbb{D} := [-x_{\text{MAX}}, -x_{\text{MIN}}] \cup [x_{\text{MIN}}, x_{\text{MAX}}]$. Ferner beschreibe $\text{fl} : \mathbb{D} \to \mathbb{M}(b, m, r, R)$ die Standardrundung. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!

1.	In $\mathbb{M}(10, 3, -8, 8)$ gilt $\left\lvert \frac{\text{fl}(x)-x}{x} \right\rvert = (1+\varepsilon)x$ mit $\lvert\varepsilon\rvert \leq 10^{-3}$ $\forall x \in \mathbb{D}$.	
2.	In $\mathbb{M}(10, 4, -8, 8)$ gilt $\text{eps} = 5 \cdot 10^{-4}$.	
3.	In $\mathbb{M}(10, 3, -8, 8)$ gilt $x_{\text{MIN}} = 10^{-8}$.	
4.	In $\mathbb{M}(10, 4, -8, 8)$ gilt $x_{\text{MAX}} = 99990000$.	

VF-2: größte (strikt) positive Zahl sowie eps die relative Maschinengenauigkeit in der Menge $\mathbb{M}(b, m, r, R)$ der Maschinenzahlen gemäß Vorlesung/Buch und $\mathbb{D} := [-x_{\text{MAX}}, -x_{\text{MIN}}] \cup [x_{\text{MIN}}, x_{\text{MAX}}]$. Ferner beschreibe $\text{fl} : \mathbb{D} \to \mathbb{M}(b, m, r, R)$ die Standardrundung. Alle Zahlenangaben sind im 10er-System. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!

1.	In $\mathbb{M}(7, 3, -10, 10)$ gilt $\left\lvert \frac{\text{fl}(x)-x}{x} \right\rvert \leq \frac{1}{98}$ $\forall x \in \mathbb{D}$.	
2.	In $\mathbb{M}(100, 4, -8, 8)$ gilt $x_{\text{MIN}} = 10^{-10}$.	
3.	In $\mathbb{M}(5, 8, -2, 9)$ gilt $x_{\text{MIN}} = 0.008$.	
4.	In $\mathbb{M}(3, 2, -4, 3)$ gilt $x_{\text{MAX}} = 18$.	

VF-3: Es seien x_{MIN} bzw. x_{MAX} die kleinste bzw. größte (strikt) positive Zahl sowie eps die relative Maschinengenauigkeit in der Menge $\mathbb{M}(b, m, r, R)$ der Maschinenzahlen gemäß Vorlesung/Buch und $\mathbb{D} := [-x_{\text{MAX}}, -x_{\text{MIN}}] \cup [x_{\text{MIN}}, x_{\text{MAX}}]$. Ferner beschreibe $\text{fl} : \mathbb{D} \to \mathbb{M}(b, m, r, R)$ die Standardrundung. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!

1.	$\lvert\text{fl}(x) - x\rvert \leq \text{eps}$ für alle $x \in \mathbb{D}$.	
2.	$\left\lvert \frac{\text{fl}(x)-x}{x} \right\rvert \leq \text{eps}$ für alle $x \in \mathbb{D}$.	
3.	Für jedes $x \in \mathbb{D}$ existiert eine Zahl ε mit $\lvert\varepsilon\rvert \leq \text{eps}$ und $\text{fl}(x) = (1+\varepsilon)x$.	
4.	Für jedes $x \in \mathbb{D}$ existiert eine Zahl ε mit $\lvert\varepsilon\rvert \leq \text{eps}$ und $\text{fl}(x) = x + \varepsilon$.	

VF-4:

1.	Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y) = y\,e^{x^2}$. Für $x = 1$ und $y \neq 0$ hat die relative Konditionszahl den Wert $\kappa_{rel} = 2$.	
2.	Die Funktion $f(x, y) = x - y$ ist für alle (x, y) mit $(x, y) \neq (0, 0)$ gut konditioniert.	
3.	Je besser die Kondition eines Problems, desto stabiler sind Algorithmen zur Lösung dieses Problems.	
4.	Nur für gut konditionierte Probleme gibt es stabile Algorithmen zur Lösung des Problems.	

VF-5: Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ habe (in der betrachteten Matrixnorm) die Konditionszahl $\kappa(A)$. Die rechte Seite $b \in \mathbb{R}^n$ sei mit einem relativen Fehler ε behaftet. Bei der Berechnung von $x := A^{-1}b$ muss man mit einem relativen Fehler in der folgenden Größenordnung rechnen:

1.	$\lVert A \rVert\, \varepsilon$	
2.	$\kappa(A)\, \varepsilon$	
3.	$\kappa(A^{-1})\, \varepsilon$	
4.	$\lVert A^{-1} \rVert\, \varepsilon$	

VF-6: Mit $b, \tilde{b}, x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ und $A, \tilde{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sowie $Ax = b$ und $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$ seien $r_b := \frac{\|\tilde{b}-b\|}{\|b\|}$, $r_x := \frac{\|\tilde{x}-x\|}{\|x\|}$ und $r_A := \frac{\|\tilde{A}-A\|}{\|A\|}$ die relativen Fehler der rechten Seite, der Lösung und der Matrix, und es gelten die Definitionen $\kappa_A := \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ sowie $h := \|\tilde{A} - A\| \cdot \|A^{-1}\|$. Hierbei sei $\|\cdot\|$ eine Vektornorm auf $\mathbb{R}^n$ bzw. die zugehörige Matrix–Norm auf $\mathbb{R}^{n\times n}$, und es sei $\|b\|, \det(A) \neq 0$ vorausgesetzt. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!

1.	Es gilt stets $r_x \leq \kappa_A \frac{r_A + r_b}{1-h}$.	
2.	$r_x \leq \kappa_A \frac{r_A + r_b}{1-h}$ gilt stets, wenn $h < 1$ gilt.	
3.	$\|\tilde{x} - x\| \leq \|A\|^{-1} \cdot \|\tilde{b} - b\|$ gilt stets, wenn $h = 0$ gilt.	
4.	$\|\tilde{x} - x\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\tilde{b} - b\|$ gilt stets, wenn $h = 0$ gilt.	

VF-7: Gegeben seien eine reguläre Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und eine rechte Seite $b \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt für das zugehörige lineare Gleichungssystem $A\,x = b$:

1.	Das Problem ist immer gut konditioniert.	
2.	Bei Störung der Eingabedaten A und b wird der relative Fehler in der Lösung in Abhängigkeit vom relativen Eingabefehler maximal durch den Faktor $\kappa(A)$ verstärkt.	
3.	Die Lösung des linearen Gleichungssystems kann immer mit dem Standard-Gauß-Algorithmus (ohne Spaltenpivotisierung) berechnet werden.	
4.	Zeilenäquilibrierung verbessert immer die Kondition der Matrix A bezüglich der 2-Norm.	