Numerische Mathematik I für Ingenieure SS14
Verständnisfragen – Übung 3

VF-1: Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ beliebig. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!		
1.	$\|A\|_\infty = \|A^T\|_1$	
2.	Falls A invertierbar ist, gilt $\|AA^{-1}\| = \|A\|\,\|A^{-1}\|$.	
3.	$\kappa(A) = 1 \Rightarrow A = I$	
4.	$\kappa(A) = \|A\|\|A^T\|$	

VF-2: Für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $\det(A) \neq 0$ und $a,\, b,\, \Delta b,\ x,\, \Delta x \in \mathbb{R}^n$ mit $b \neq 0$ sei x die Lösung von $A\,x = b$ und $x + \Delta x$ die Lösung von $A\,(x + \Delta x) = b + \Delta b$. Es sei $\|.\|$ eine Vektornorm auf $\mathbb{R}^n$ bzw. die zugehörige Matrix–Norm auf $\mathbb{R}^{n\times n}$. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!		
1.	$\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\|\,\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|}$	
2.	$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\|\,\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$	
3.	$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \|A\| \cdot \|A\|^{-1}\,\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$	
4.	$\|\Delta x\| \leq \|A^{-1}\|\,\|\Delta b\|$	

VF-3: Mit $b, \tilde{b}, x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ und $A, \tilde{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sowie $Ax = b$ und $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$ seien $r_b := \frac{\|\tilde{b}-b\|}{\|b\|}$, $r_x := \frac{\|\tilde{x}-x\|}{\|x\|}$ und $r_A := \frac{\|\tilde{A}-A\|}{\|A\|}$ die relativen Fehler der rechten Seite, der Lösung und der Matrix, und es gelten die Definitionen $\kappa_A := \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ sowie $h := \|\tilde{A} - A\| \cdot \|A^{-1}\|$. Hierbei sei $\|\cdot\|$ eine Vektornorm auf $\mathbb{R}^n$ bzw. die zugehörige Matrix–Norm auf $\mathbb{R}^{n\times n}$, und es sei $\|b\|, \det(A) \neq 0$ vorausgesetzt. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!		
1.	Es gilt stets $r_x \leq \kappa_A \frac{r_A + r_b}{1-h}$.	
2.	$r_x \leq \kappa_A \frac{r_A + r_b}{1-h}$ gilt stets, wenn $h < 1$ gilt.	
3.	$\|\tilde{x} - x\| \leq \|A\|^{-1} \cdot \|\tilde{b} - b\|$ gilt stets, wenn $h = 0$ gilt.	
4.	$\|\tilde{x} - x\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\tilde{b} - b\|$ gilt stets, wenn $h = 0$ gilt.	