Numerische Mathematik I für Ingenieure SS14
Verständnisfragen – Übung 4

VF-1: Es seien $A \in R^{n\times n}$ regulär, $b \in \mathbb{R}^n$ und gesucht sei die Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ von $Ax = b$. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!		
1.	Der Aufwand für das Rückwärtseinsetzen ist etwa $\frac{1}{2}n^2$ Operationen.	
2.	Sei $\tilde{x}$ eine Annäherung an x und $\tilde{r} = b - A\tilde{x}$ das zugehörige Residuum. Dann gilt: $\|\|x - \tilde{x}\|\| \cdot \|\|b\|\| \leq \kappa(A) \cdot \|\|x\|\| \cdot \|\|\tilde{r}\|\|$	
3.	$\kappa_2(A) > 0$	
4.	Sei $\tilde{x}$ eine Annäherung an x und $\tilde{r} = b - A\tilde{x}$ das zugehörige Residuum. Dann gilt: $\|\|x - \tilde{x}\|\| \cdot \|\|b\|\| \leq \kappa(A^{-1}) \cdot \|\|x\|\| \cdot \|\|\tilde{r}\|\|$	

VF-2: Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!		
1.	Es existiert immer eine LR-Zerlegung von A mit $A = L\,R$.	
2.	Ist $\det(A) \neq 0$, so existiert stets eine normierte untere Dreiecksmatrix L und eine obere Dreiecksmatrix R, so dass $A = LR$.	
3.	Es sei P eine Permutationsmatrix, L eine normierte untere Dreiecksmatrix und R eine oberere Dreiecksmatrix, so dass $PA = LR$. Dann gilt $\|\det(A)\| = \|\det(R)\|$.	
4.	$\|\|A\|\|_\infty = \max\limits_{1\leq i\leq n} \sum\limits_{j=1}^{n} \left\|a_{ji}\right\|$.	

VF-3: Gegeben sei eine nichtsinguläre Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!		
1.	Es existiert immer eine LR-Zerlegung von A mit $A = L\,R$.	
2.	Der Rechenaufwand zur Berechnung der LR-Zerlegung über Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung beträgt $\frac{1}{6}\,n^3$ Operationen.	
3.	Die Inverse von A kann mittels LR-Zerlegung mit Pivotisierung in $\frac{4}{3}\,n^3$ Operationen berechnet werden.	
4.	Falls A symmetrisch positiv definit ist, existiert immer eine LDL^T-Zerlegung von A.	

VF-4: Mit $A, L, D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sei L eine normierte linke untere Dreiecksmatrix und D eine Diagonalmatrix. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!		
1.	Ist A regulär, so existiert stets eine LDL^T–Zerlegung mit $A = LDL^T$.	
2.	Ist A positiv definit und symmetrisch, so existiert stets eine LDL^T–Zerlegung mit $A = LDL^T$, wobei alle Diagonalelemente von D positiv sind.	
3.	Nur für positiv definite Matrizen A kann man mit dem Cholesky-Algorithmus eine Zerlegung $A = LDL^T$ finden.	
4.	Ist A regulär und symmetrisch, so existiert stets eine LDL^T–Zerlegung, so dass $A = LDL^T$ gilt.	
5.	Ist A symmetrisch positiv definit, so existiert stets eine normierte untere Dreiecksmatrix L und eine obere Dreiecksmatrix R, so dass $A = LR$.	

VF-5: Es seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine allgemeine, reguläre Matrix und $x, b \in \mathbb{R}^n$ mit $A\,x = b$. Weiter sei $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine reguläre, obere Dreiecksmatrix und $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische, positiv–definite Matrix. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!		
1.	Die Lösung von $R\,x = b$ benötigt $\frac{n^3}{3} + \mathcal{O}(n^2)$ Ops	
2.	Die Lösung von $A\,x = b$ per Gaußelimination benötigt $n^3 + \mathcal{O}(n^2)$ Ops	
3.	Die Lösung von $S\,x = b$ per Choleskyzerlegung benötigt $\frac{n^3}{3} + \mathcal{O}(n^2)$ Ops	
4.	Die Skalierung von A benötigt $\mathcal{O}(n^2)$ Ops	

VF-6: Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Die Abkürzung "SPD" stehe für symmetrisch und positiv–definit. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!		
1.	A SPD $\Longrightarrow$ A ist invertierbar	
2.	A SPD $\Longleftrightarrow$ A^{-1} SPD	
3.	A SPD $\Longrightarrow$ A hat nur positive Eigenwerte	
4.	A symmetrisch mit $A > .0$ (komponentenweise) $\Longrightarrow$ A ist SPD	
5.	Zur Lösung eines Gleichungssystems mit einer SPD–Matrix kann man bei der Gauß–Elimination auf die Spaltenpivotisierung verzichten.	
6.	A ist eine SPD–Matrix genau dann, wenn A eine Cholesky–Zerlegung besitzt, und alle Diagonalelemente des Cholesky–Faktors L ($A = L\,L^T$) positiv sind.	