Numerische Mathematik I für Ingenieure SS14
Verständnisfragen – Hausübung 5

VF-1: Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine normierte untere Dreiecksmatrix, $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Diagonalmatrix mit Diagonaleinträgen $d_{i,i} > 0$, $i = 1, \ldots, n$.		
1.	Falls eine Zerlegung $A = LDL^T$ existiert, dann ist A symmetrisch positiv definit.	wahr
2.	Für jede invertierbare Matrix A existiert eine Zerlegung $A = LDL^T$.	falsch
3.	Für jede symmetrische Matrix A existiert eine Zerlegung $A = LDL^T$.	falsch
4.	Die Matrix LDL^T ist invertierbar.	wahr

VF-2: Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch positiv definit, $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine normierte untere Dreiecksmatrix und $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Diagonalmatrix.		
1.	Das Cholesky-Verfahren zur Bestimmung der Cholesky-Zerlegung $A = LDL^T$ ist nur dann stabil, wenn man Pivotisierung benutzt.	falsch
2.	Der Aufwand des Cholesky-Verfahrens zur Bestimmung der Cholesky-Zerlegung $A = LDL^T$ ist ca. $\frac{1}{3}n^3$ Operationen.	falsch
3.	Es sei $A = LDL^T$. Dann gilt $\det A = \prod_{i=1}^{n} d_{i,i}$, wobei $d_{i,i}$ die Diagonaleinträge der Matrix D sind.	wahr
4.	Es gilt $\kappa_2(A) = \kappa_2(D)$, wobei $\kappa_2(.)$ die Konditionszahl bezüglich der euklidischen Norm ist.	falsch

VF-3: Es seien $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine positiv definite Matrix und $A = L\,D\,L^T$ die Cholesky-Zerlegung von A.		
1.	Es gilt: $\det(A) > 0$.	wahr
2.	Es gilt: $\det(A) = \det(D)$.	wahr
3.	Der Rechenaufwand des Cholesky-Verfahrens zur Bestimmung der Cholesky-Zerlegung ist etwa $\frac{1}{2}n^2$ Operationen.	falsch
4.	Das Cholesky-Verfahren zur Bestimmung der Cholesky-Zerlegung ist nur dann stabil, wenn man Pivotisierung benutzt.	falsch

VF-4: Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit $m \geq n$.		
1.	Alle Eigenwerte von $A^T A$ sind größer als 0.	falsch
2.	Wenn alle Spalten von A linear unabhängig sind, dann ist $A^T A$ symmetrisch positiv definit.	wahr
3.	Wenn alle Zeilen von A linear unabhängig sind, dann ist AA^T symmetrisch positiv definit.	wahr
4.	Wenn alle Zeilen von A linear unabhängig sind, dann ist AA^T invertierbar.	wahr

VF-5: Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit $m \geq n$.		
1.	Der Aufwand zur Berechnung von $A^T A$ ist proportional zu $m^2\,n$.	falsch
2.	Der Aufwand zur Berechnung von $A^T A$ ist proportional zu $n^2\,m$.	wahr
3.	Der Aufwand zur Berechnung von $A^T A$ ist stets größer als der zum Lösen der Normalgleichungen.	wahr
4.	Zur Lösung der Normalgleichungen verwendet man das Cholesky-Verfahren, weil das Vorwärts-/Rückwärtseinsetzen bei der $L\,D\,L^T$-Zerlegung ungefähr halb soviele Operationen benötigt wie das bei einer $L\,R$-Zerlegung.	falsch

VF-6: Es seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine positiv definite Matrix und $A = L\,D\,L^T$ die Cholesky-Zerlegung von A.		
1.	Es gilt: $\det(A) > 0$.	wahr
2.	Es gilt: $\det(A) = \det(D)$.	wahr
3.	Der Rechenaufwand des Cholesky-Verfahrens zur Bestimmung der Cholesky-Zerlegung ist etwa $\frac{1}{2}n^2$ Operationen.	falsch
4.	Das Cholesky-Verfahren zur Bestimmung der Cholesky-Zerlegung ist nur dann stabil, wenn man Pivotisierung benutzt.	falsch

VF-7: Sei $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine orthogonale Matrix.		
1.	$\|Q\|_2 = 1$.	wahr
2.	Q^T ist orthogonal.	wahr
3.	$\|Q^{-1}\|_2 = 1$.	wahr
4.	Q ist symmetrisch positiv definit.	falsch

VF-8: Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit zugehöriger normierter unterer Dreiecksmatrix $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und regulärer Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$.		
1.	Der Cholesky-Algorithmus liefert nur dann eine Zerlegung $A = LDL^T$, wenn A symmetrisch und positiv definit ist.	falsch
2.	Der Cholesky-Algorithmus liefert stets eine Zerlegung $A = LDL^T$, wenn A symmetrisch und regulär ist.	falsch
3.	Bei bereits bekannter Zerlegung $A = LDL^T$ löst man das System $Ax = b$ am effizientesten, indem man zuerst das Produkt LD berechnet, dann aus $b = LDz$ durch Vorwärtseinsetzen z bestimmt und schließlich aus $z = L^T x$ durch Rückwärtseinsetzen x bestimmt.	falsch
4.	Bei bereits bekannter Zerlegung $A = LDL^T$ löst man das System $Ax = b$ am effizientesten, indem man aus $b = Ly$ durch Vorwärtseinsetzen y bestimmt, dann $D^{-1}y$ berechnet und schließlich aus $D^{-1}y = L^T x$ durch Rückwärtseinsetzen x bestimmt.	wahr

VF-9: Es sei $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ eine orthogonale Matrix und κ_2 bezeichne die Kondition bzgl. der $\|.\|_2$-Norm.		
1.	$Q^T Q = Q Q^T = I$.	wahr
2.	$|\det(Q)| = \|Q\|_2 = \|Q^T\|_2 = \|Q^{-1}\|_2 = \kappa_2(Q) = \kappa_2(Q^T) = \kappa_2(Q^{-1}) = 1$.	wahr
3.	$\|Qx\|_2 = \|x\|_2 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^m$.	wahr
4.	$\|QA\|_2 = \|A\|_2 \qquad \forall A \in \mathbb{R}^{m\times m}$.	wahr
5.	$\kappa_2(QA) = \kappa_2(AQ) = \kappa_2(A) \qquad \forall A \in \mathbb{R}^{m\times m}$.	wahr

VF-10: Beantworte alle Fragen bezüglich orthogonaler Matrizen $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ mit wahr oder falsch.		
1.	Orthogonale Matrizen sind stets symmetrisch.	falsch
2.	Die $\|.\|_2$-Norm jeder Zeile und Spalte einer orthogonalen Matrix ist stets gleich 1.	wahr
3.	Orthogonale Matrizen sind stets identisch mit ihrer Inversen.	falsch
4.	Produkte orthogonaler Matrizen sind wieder orthogonal.	wahr