Numerische Mathematik I für Ingenieure SS14
Verständnisfragen – Übung 5

VF-1: Es seien $\|.\|$ eine Vektornorm auf $\mathbb{R}^n$ und $\|.\|$ die zugehörige Matrix–Norm. Weiter seien $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!

1.	$\|A^k\| \leq \|A\|^k$	
2.	Es sei A zusätzlich invertierbar. Dann gilt $\|A^{-1}\| \geq \frac{1}{\|A\|}$	
3.	Es sei A zusätzlich invertierbar. Dann gilt $\|A^{-1}\| = \frac{1}{\inf_{\|x\|=1} \|A\,x\|}$	
4.	$\forall x \in \mathbb{R}^n \ : \ \|A\,x\| = \|A\|\,\|x\|$	
5.	$\|A\,B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$	

VF-2: Es seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine allgemeine, reguläre Matrix und $x, b \in \mathbb{R}^n$ mit $A\,x = b$. Weiter seien $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine reguläre obere Dreiecksmatrix, $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine normierte untere Dreiecksmatrix und $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische, positiv–definite Matrix. (Bei den Angaben zur Zahl der benötigten Operationen (kurz "Ops") verwenden wir die Zählung wie in der Vorlesung bzw. im Buch). Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!

1.	Die Lösung von $R\,x = b$ benötigt $\frac{n^3}{3} + \mathcal{O}(n^2)$ Ops.	
2.	Die Lösung von $L\,x = b$ benötigt $\frac{n^2}{2} + \mathcal{O}(n)$ Ops.	
3.	Die Lösung von $A\,x = b$ per Gaußelimination benötigt $\frac{n^3}{3} + \mathcal{O}(n^2)$ Ops.	
4.	Die Lösung von $S\,x = b$ per Choleskyzerlegung benötigt $\frac{n^3}{6} + \mathcal{O}(n^2)$ Ops.	

VF-3: Es seien $A,\, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ orthogonale (quadratische) Matrizen, d.h. $A^T A = I$ und $B^T B = I$, wobei I die Einheitsmatrix ist. Weiter bezeichne $\|.\|_2$ die Euklidische Vektor- / Matrixnorm und κ_2 die zugehörige Konditionszahl. Welche der folgenden Aussagen sind immer korrekt?		
1.	A^T ist orthogonal	
2.	$A\,A^T = I$	
3.	A ist nicht symmetrisch	
4.	A ist symmetrisch	
5.	$A\,B$ ist eine orthogonale Matrix	
6.	$A + B$ ist eine orthogonale Matrix	
7.	Die Spalten von A sind paarweise orthogonal	
8.	Die Zeilen von A sind paarweise orthogonal	
9.	Alle Zeilen und Spalten von A haben die Euklidische Länge 1	
10.	$\|A\,x\|_2 = \|x\|_2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$	
11.	$\kappa_2(A) = 1$	

VF-4: Es seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ beliebig aber regulär, $b \in \mathbb{R}^n$ und gesucht sei die Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ von $Ax = b$.		
1.	Es sei $B := D\,A$ die zeilenäquilibrierte Matrix zu A. Dann gilt $\kappa_2(B) \leq \kappa_2(A)$.	
2.	Es seien $\tilde{x}$ die Lösung des gestörten Problems $A\,\tilde{x} = \tilde{b}$ und $\kappa(A)$ die Konditionszahl der Matrix A bezüglich $\|\cdot\|$. Es gilt $\|\tilde{x} - x\| \leq \kappa(A)\|\tilde{b} - b\|$.	
3.	Es existiert immer eine $L\,R$-Zerlegung $A = L\,R$ von A.	
4.	Es existiert immer eine $Q\,R$-Zerlegung $A = Q\,R$ von A.	