

Numerische Mathematik I für Ingenieure SS14

Verständnisfragen – Übung 6

VF-1: Es seien $\mathbf{0} \neq v \in \mathbb{R}^n$ und $Q_v = I - 2 \frac{v v^T}{v^T v}$ die entsprechende Householder-Transformation. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!	
1.	$\ Q_v x\ _2 = \ x\ _2$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.
2.	Q_v ist symmetrisch.
3.	$Q_v v = -v$.
4.	Q_v ist symmetrisch positiv definit.

VF-2: Es seien $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ eine orthogonale Matrix, $R \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine obere Dreiecksmatrix und $A = QR$. Ferner bezeichne $\kappa_2(A)$ die Konditionszahl der Matrix A bezüglich der Euklidischen Norm. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!	
1.	Ist $m = n$ und $\det(A) \neq 0$, so gilt $A^{-1} = R^T Q^T$.
2.	Ist $m = n$ und $\det(A) \neq 0$, so gilt $\kappa_2(A) = \kappa_2(R)$.
3.	Nicht alle $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ besitzen eine QR -Zerlegung.
4.	Eine QR -Zerlegung kann man stets auf stabile Weise mittels Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung bestimmen.

<p>VF-3: Es seien $m > n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b, \tilde{b} \in \mathbb{R}^m$ und $x^* \in \mathbb{R}^n$ die Lösung des linearen Ausgleichproblems $\ Ax^* - b\ _2 = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \ Ax - b\ _2$. Weiter sei $\Theta \in [0, \frac{\pi}{2})$ der Winkel zwischen Ax^* und b sowie \tilde{x} die Lösung des gestörten Problems $\ A\tilde{x} - \tilde{b}\ _2 = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \ Ax - \tilde{b}\ _2$. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!</p>		
1.	$\frac{\ \tilde{x} - x^*\ _2}{\ x^*\ _2} \leq \frac{\kappa_2(A) \ \tilde{b} - b\ _2}{\sin \Theta \ b\ _2}$	
2.	$\frac{\ \tilde{x} - x^*\ _2}{\ x^*\ _2} \leq \frac{\kappa_2(A) \ \tilde{b} - b\ _2}{\cos \Theta \ b\ _2}$	
3.	$\frac{\ \tilde{x} - x^*\ _2}{\ x^*\ _2} \leq \tan \Theta \kappa_2(A) \frac{\ \tilde{b} - b\ _2}{\ b\ _2}$	
4.	Je größer der Winkel Θ , desto schlechter ist das Problem konditioniert.	

<p>VF-4: Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit $m \geq n$. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!</p>		
1.	Alle Eigenwerte von $A^T A$ sind größer als 0.	
2.	Wenn alle Spalten von A linear unabhängig sind, dann ist $A^T A$ symmetrisch positiv definit.	
3.	Wenn alle Zeilen von A linear unabhängig sind, dann ist AA^T symmetrisch positiv definit.	
4.	Wenn alle Zeilen von A linear unabhängig sind, dann ist AA^T invertierbar.	