Numerische Mathematik I für Ingenieure SS14
Verständnisfragen – Hausübung 8

VF-1: Mit $k \in \mathbb{N}$ und den Iterationswerten $x_k \in \mathbb{R}$ gelte $x^* = \lim_{k\to\infty} x_k$. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!		
1.	Die Folge $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert mit mindestens der Ordnung $p > 1$ gegen x^*, wenn $c > 0$ und $k_0 \in \mathbb{N}$ existieren, so dass $\|x_{k+1} - x^*\| \leq c\|x_k - x^*\|^p$ für alle $k \geq k_0$ gilt.	
2.	Die Folge $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert mit mindestens der Ordnung $p = 1$ gegen x^*, wenn $c > 1$ und $k_0 \in \mathbb{N}$ existieren, so dass $\|x_{k+1} - x^*\| \leq c\|x_k - x^*\|$ für alle $k \geq k_0$ gilt.	
3.	Ein iteratives Verfahren hat die Konvergenzordnung $p > 1$, wenn sich die Anzahl gültiger Stellen asymptotisch (d. h. für $k \to \infty$) von Iterationsschritt zu Iterationsschritt um den Faktor p vergrößert.	
4.	Je größer die Konvergenzordnung p ist, desto kleiner ist das kleinste $k \in \mathbb{N}$ mit $x_k = x^*$.	

VF-2: Mit der stetig differenzierbaren Funktion $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und den Iterationswerten $x^k \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$, betrachten wir die Iterationsvorschrift $x^{k+1} := \Phi(x^k)$. Ferner sei E eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$, $x^0 \in E$ und $L \in [0, 1)$. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!		
1.	Ist Φ selbstabbildend und kontraktiv in E, so ist $x^* = \lim_{k\to\infty} x^k$ äquivalent zu $\Phi(x^*) = x^* \in E$, egal ob E konvex ist oder nicht.	
2.	Ist die Teilmenge $E \subset \mathbb{R}^n$ konvex, mit $\Phi(E) \subset E$ sowie $\|\|\Phi'(x)\|\| \leq L\ \forall x \in E$ in einer beliebigen Operatornorm, so konvergiert die Folge $\{x^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ gegen den eindeutigen Fixpunkt $x^* \in E$.	
3.	Ist E konvex, so ist in einer beliebigen Operatornorm $\|\|\Phi'(x)\|\| \leq L\ \forall x \in E$ hinreichend für die Kontraktivität von Φ in E.	
4.	Φ ist kontraktiv in E, wenn in einer beliebigen Norm gilt $\|\|\Phi(x) - \Phi(y)\|\| \leq L\,\|\|x - y\|\|$ $\forall x, y \in E$.	

VF-3: Es sei $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, und für $x^* \in \mathbb{R}$ gelte $\Phi(x^*) = x^*$ und $\|\Phi'(x^*)\| < 1$. Mit $x_0 \in \mathbb{R}$ wird die Fixpunktiteration $x_{k+1} := \Phi(x_k),\ k = 0, 1, 2, \ldots$ definiert. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!		
1.	Die Fixpunktiteration konvergiert stets, wenn $\|x_0 - x^*\|$ hinreichend klein ist.	
2.	Die Konvergenzordnung der Fixpunktiteration kann größer als 2 sein.	
3.	Für $\Phi(x) = 5\arctan(x) + 8$ konvergiert das Fixpunktverfahren für beliebige Startwerte $x_0 \in \mathbb{R}$ gegen den eindeutigen Fixpunkt von Φ in $\mathbb{R}$.	
4.	Falls $\Phi'(x^*) = 0$ gilt, ist die Konvergenzordnung der Fixpunktiteration größer als 1.	

VF-4: Es seien $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $x^\star$ so, dass $\Phi(x^\star) = x^\star$ gilt. Für $x_0 \in \mathbb{R}$ wird die Fixpunktiteration $x_{k+1} = \Phi(x_k),\ k = 0, 1, 2, \ldots$ definiert.		
1.	Falls $\|\Phi'(x^\star)\| < 1$ gilt, so konvergiert die Fixpunktiteration für alle Startwerte x_0 mit $\|x_0 - x^\star\|$ hinreichend klein.	
2.	Falls $\|\Phi'(x^\star)\| > 1$ gilt, so existiert kein $x_0 \neq x^\star$ mit $\lim_{k\to\infty} x_k = x^\star$.	
3.	Die Konvergenzordnung der Fixpunktiteration ist in der Regel 1.	
4.	Falls $\Phi'(x^\star) = 0$ gilt, so konvergiert die Fixpunktiteration für alle Startwerte x_0 mit $\|x_0 - x^\star\|$ hinreichend klein, und die Konvergenzordnung ist größer als 1.	