Numerische Mathematik I für Ingenieure SS14
Verständnisfragen – Übung 12

VF-1: Seien $f \in C[a,b]$ und $I(f) := \int_a^b f(x)dx$ das Integral von f auf $[a,b]$. Ferner sei $Q(f) = \sum_{i=0}^m \omega_i f(x_i)$ eine Quadraturformel. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!

1.	Die absolute Kondition des Integrationsproblems $I(f)$ bzgl. der Maximumnorm ist gut.	
2.	Die relative Kondition des Integrationsproblems $I(f)$ bzgl. der Maximumnorm ist gut.	
3.	Falls die Quadraturformel exakt ist vom Grad n, dann gilt für alle $p \in \Pi_n$: $I(p) = Q(p)$.	
4.	Die Gewichte ω_i einer Quadraturformel sind immer positiv.	

VF-2: Das Integral $I(f) := \int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x$ soll numerisch approximiert werden durch geeignete Quadraturformeln. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!

1.	Der Fehler der Mittelpunktsregel ist stets genau halb so groß wie der Fehler der Trapezregel.	
2.	Die Mittelpunktsregel ist stets exakt, wenn f ein Polynom vom Grade ≤ 2 ist.	
3.	Die summierte Mittelpunktsregel ist stets exakt, wenn f ein Polynom vom Grade ≤ 2 ist.	
4.	Die Simpsonregel ist stets exakt, wenn f ein Polynom vom Grade ≤ 3 ist.	

VF-3: Es sei $f \in C[a,b]$. Das Integral $I(f) := \int_a^b f(x)dx$ werde durch eine Newton-Cotes-Formel $I_m(f)$ zu äquidistanten Stützstellen $a \leq x_0 < \ldots < x_m \leq b$ approximiert.

1.	$I_m(q) = I(q)$ für alle $q \in \Pi_{m+2}$.	
2.	Es gilt $I_m(f) = \int_a^b P(f \mid x_0, \ldots, x_m)(x)\,dx$.	
3.	Falls $f \in C^{m+1}[a,b]$, dann gilt für den Fehler $\lvert I(f) - I_m(f)\rvert \leq \frac{(b-a)^{m+2}}{(m+1)!} \max_{x\in[a,b]} \lvert f^{(m+1)}(x)\rvert$.	
4.	Newton-Cotes-Formeln höherer Ordnung können aufgrund von Auslöschung instabil sein.	