

Numerik MB

NAME:

MATR:

- **Maschinengenauigkeit:** Es sei $\mathbb{M}(b, m, r, R)$ die Menge der Maschinenzahlen. Dann ist $\text{eps} := \frac{b^{1-m}}{2}$ die relative Maschinengenauigkeit.
- **Fehlervverstärkung:** Es sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ hinreichend oft differenzierbar. Dann gilt:

$$\underbrace{\frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)}}_{\text{rel. Fehler der Ausgabe}} \doteq \underbrace{\sum_{j=1}^n \phi_j(x)}_{\text{Fehlervverstärkung}} \cdot \underbrace{\frac{\tilde{x}_j - x_j}{x_j}}_{\text{rel. Fehler der Eingabe}} \quad (1)$$

mit

$$\phi_j(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \cdot \frac{x_j}{f(x)}, \quad (2)$$

bzw.

$$\left| \frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)} \right| \leq \kappa_{\text{rel}}(x) \sum_{j=1}^n \left| \frac{\tilde{x}_j - x_j}{x_j} \right| \quad (3)$$

mit

$$\kappa_{\text{rel}}(x) = \kappa_{\text{rel}}^{\infty}(x) = \max_j |\phi_j(x)|. \quad (4)$$

- **Störungssätze:** Für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $\det(A) \neq 0$ sei $\kappa(A) := \kappa_{\|\cdot\|}(A) := \|A^{-1}\| \|A\|$.

a) Nur die rechte Seite b ist gestört, d.h. $x + \Delta x$ ist die Lösung von $A(x + \Delta x) = b + \Delta b$. Dann gilt

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \kappa(A) \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \quad (5)$$

Sei nun $\tilde{x}$ die Annäherung der Lösung x und $\tilde{r} = b - A\tilde{x}$ das Residuum. Dann gilt:

$$\kappa(A)^{-1} \frac{\|\tilde{r}\|}{\|b\|} \leq \frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} \leq \kappa(A) \frac{\|\tilde{r}\|}{\|b\|} \quad (6)$$

b) Es gelte $\kappa(A) \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} < 1$. Es sei $x + \Delta x$ die Lösung von $(A + \Delta A)(x + \Delta x) = b + \Delta b$. Dann gilt:

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\kappa(A)}{1 - \kappa(A) \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}} \left(\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \right) \quad (7)$$

- **Cholesky-Verfahren:** ($A = L D L^T$) Für aufeinanderfolgende Spalten, $k = 1, 2, \dots, n$ erhält man für $d_{k,k}$ und $l_{i,k}$ ($i > k$):

$$d_{k,k} = a_{k,k} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{k,j}^2 d_{j,j}, \quad l_{i,k} = \left(a_{i,k} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{i,j} d_{j,j} l_{k,j} \right) / d_{k,k} \quad (8)$$

- **Givens-Rotation:** Grundaufgabe: Gegeben $(a, b)^T \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Finde $c, s \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{Lösung: } r := \pm \sqrt{a^2 + b^2}, \quad c := \frac{a}{r}, \quad s := \frac{b}{r} \quad (9)$$

- **Householder-Spiegelung:** Grundaufgabe: Zu $y \in \mathbb{R}^n$, $y \notin \text{span}(e^1)$, finde $v \in \mathbb{R}^n$ so, dass

$$Q_v y = \pm \|y\|_2 e^1 \text{ mit } Q_v = I - 2 \frac{v v^T}{v^T v} \quad (10)$$

Lösung: mit $\alpha = \text{sign}(y_1) \|y\|_2$, $v = y + \alpha e^1$ gilt $Q_v y = -\alpha e^1$

- **Linearer Ausgleich:** ($A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit $\text{Rang}(A) = n$: Finde x^* mit $\|A x^* - b\|_2 = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|A x - b\|_2$)

$$\kappa_2(A) := \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} / \min_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \quad (11)$$

Für die Kondition bezüglich Störungen in b gilt:

$$\frac{\|\tilde{x} - x^*\|_2}{\|x^*\|_2} \leq \frac{\kappa_2(A)}{\cos(\Theta)} \frac{\|\tilde{b} - b\|_2}{\|b\|_2} \quad (12)$$

- **Banachscher Fixpunktsatz**

Es sei X ein linear normierter Raum mit Norm $\|\cdot\|$. $E \subset X$ sei eine vollständige Teilmenge von X . Die Abbildung Φ sei eine Selbstabbildung auf E : $\Phi : E \rightarrow E$. Ferner sei Φ eine Kontraktion auf E : $\|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq L\|x - y\|$ für alle $x, y \in E$, mit $L < 1$. Dann gilt:

1. Es existiert genau ein Fixpunkt x^* von Φ in E .
2. Für beliebiges $x_0 \in E$ konvergiert $x_{k+1} = \Phi(x_k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$ gegen den Fixpunkt x^* .
3. A-priori-Fehlerabschätzung: $\|x_k - x^*\| \leq \frac{L^k}{1-L} \|x_1 - x_0\|$
4. A-posteriori-Fehlerabschätzung: $\|x_k - x^*\| \leq \frac{L}{1-L} \|x_k - x_{k-1}\|$

Hinreichendes Kriterium: Sei $X = \mathbb{R}^n$, E abgeschlossen und konvex sowie $\Phi \in C^1(E)$ mit $\Phi(E) \subset E$ und $\max_{x \in E} \|\Phi'(x)\| \leq L < 1$. Dann sind die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt.

- **Newtonverfahren:** $x_{k+1} = x_k - [f'(x_k)]^{-1} f(x_k)$

Durchführung des Newtonverfahrens für Systeme:

Gegeben: Startwert x^0 . Für $k = 0, 1, 2, \dots$:

- Löse $f'(x^k)s^k = -f(x^k)$
- Setze $x^{k+1} = x^k + s^k$

- **Nichtlineare Ausgleichsrechnung:** gegeben $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar, finde x^* mit $\|F(x^*)\|_2 = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|F(x)\|_2$.

Gauß-Newton-Verfahren: Startwert x^0 , für $k = 0, 1, 2, \dots$:

- Finde s^k mit minimaler 2-Norm so, dass $\|F'(x^k)s^k + F(x^k)\|_2 = \min_{s \in \mathbb{R}^n} \|F'(x^k)s + F(x^k)\|_2$.
- Setze $x^{k+1} = x^k + s^k$.

Falls $F'(x_k)$ vollen Rang hat, entspricht dies der Iterationsvorschrift

$$x_{k+1} = x_k - [F'(x_k)^T F'(x_k)]^{-1} F'(x_k)^T F(x_k)$$

Levenberg-Marquardt-Verfahren: Startwert x^0 , für $k = 0, 1, 2, \dots$:

- Finde s^k sodass $\|F'(x^k)s^k + F(x^k)\|_2^2 + \mu^2 \|s^k\|_2^2 = \min_{s \in \mathbb{R}^n} \|F'(x^k)s + F(x^k)\|_2^2 + \mu^2 \|s\|_2^2$
mit wählendem Parameter $\mu > 0$.
- Setze $x^{k+1} = x^k + s^k$.

Dies führt auf die Iterationsvorschrift $x_{k+1} = x_k - [F'(x_k)^T F'(x_k) + \mu^2 I]^{-1} F'(x_k)^T F(x_k)$

• Interpolation

Lagrange-Interpolationspolynom

Interpolationsproblem: zu gegebenen paarweise verschiedenen Stützstellen $x_0, \dots, x_n$ und gegebenen Daten $f(x_0), \dots, f(x_n)$, finde $P_n \in \Pi_n$ mit $P_n(x_j) = f(x_j)$, $j = 0, \dots, n$.

Lagrange-Darstellung: $P_n(x) = \sum_{j=0}^n f(x_j) l_{j,n}(x)$, mit $l_{j,n}(x) = \prod_{k=0, k \neq j}^n \frac{x - x_k}{x_j - x_k}$

Neville-Aitken

$$P(f|x_0, \dots, x_n)(x) = \frac{x - x_0}{x_n - x_0} P(f|x_1, \dots, x_n)(x) + \frac{x_n - x}{x_n - x_0} P(f|x_0, \dots, x_{n-1})(x) \quad (13)$$

Rekursionsformel:

$$P_{i,0} := f(x_i) \quad P_{i,k} := P(f|x_{i-k}, \dots, x_i)(x), \quad 0 \leq k \leq i \leq n, \quad (14)$$

$$P_{i,k} = P_{i,k-1} + \frac{P_{i,k-1} - P_{i-1,k-1}}{x_i - x_{i-k}} (x - x_i) \quad \rightarrow \quad P_{n,n} = P_n(x) \quad (15)$$

Newtonsche Interpolationsformel

$$P(f|x_0, \dots, x_n)(x) = [x_0]f + (x - x_0)[x_0, x_1]f + (x - x_0)(x - x_1)[x_0, x_1, x_2]f + \dots + (x - x_0) \cdots (x - x_{n-1})[x_0, \dots, x_n]f \quad (16)$$

Dividierte Differenzen

$$p_{i,0} := [x_i]f = f(x_i) \quad (17)$$

$$[x_0, \dots, x_n]f = \frac{[x_1, \dots, x_n]f - [x_0, \dots, x_{n-1}]f}{x_n - x_0} \quad (18)$$

$$p_{i,k} = \frac{p_{i,k-1} - p_{i-1,k-1}}{x_i - x_{i-k}} \quad (19)$$

Eigenschaft $[x_i, \dots, x_{k+i}]f = \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}$.

Horner-Schema

Gegeben: $p_{0,0}, \dots, p_{n,n}$, x .

$$- b_n := p_{n,n}$$

- Für $k = n-1, n-2, \dots, 0$:

$$b_k = p_{k,k} + (x - x_k) b_{k+1}$$

Dann ist $P_n(x) = b_0$.

Interpolationsfehler

Seien $x_0, \dots, x_n$ Stützstellen, $a := \min\{x_0, \dots, x_n\}$, $b := \max\{x_0, \dots, x_n\}$ und $x \in \mathbb{R}$.

Sei $I := [\min\{a, x\}, \max\{b, x\}]$. Für $f \in C^{n+1}(I)$ existiert $\xi \in I$ so, dass

$$f(x) - P(f|x_0, \dots, x_n)(x) = (x - x_0) \cdots (x - x_n) \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}. \quad (20)$$

Für $\hat{x} \in [a, b]$ gilt:

$$|f(\hat{x}) - P(f|x_0, \dots, x_n)(\hat{x})| \leq \left| \prod_{j=0}^n (\hat{x} - x_j) \right| \max_{y \in [a, b]} \frac{|f^{(n+1)}(y)|}{(n+1)!} \quad (21)$$

Numerik MB

NAME:

MATR:

• Numerische Integration

Trapezregel:

Es sei $f \in C^2([t_{k-1}, t_k])$. Es gilt:

$$\frac{h}{2} [f(t_{k-1}) + f(t_k)] = \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(x) dx + \frac{f''(\xi_k)}{12} h^3$$

für ein $\xi_k \in [t_{k-1}, t_k]$

summierte Trapezregel:

$$T(h) = h \left[\frac{1}{2} f(a) + f(t_1) + \dots + f(t_{n-1}) + \frac{1}{2} f(b) \right]$$

mit $n h = b - a$, für $f \in C^2([a, b])$:

$$\left| T(h) - \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{b-a}{12} h^2 \max_{x \in [a, b]} |f''(x)|$$

summierte Simpson-Regel:

$$S(h) = \frac{h}{6} \left[f(t_0) + 4f\left(\frac{t_0+t_1}{2}\right) + 2f(t_1) + 4f\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right) + 2f(t_2) + \dots + 2f(t_{n-1}) + 4f\left(\frac{t_{n-1}+t_n}{2}\right) + f(t_n) \right]$$

Newton-Cotes-Formeln

$$h = d - c,$$

für $m = 0$: $x_0 = c + \xi_0 h$ mit $\xi_0 := \frac{1}{2}$,für $m > 0$: $x_j = c + \xi_j h$ mit $\xi_j := \frac{j}{m}$ für $j = 0, \dots, m$

$$I_m(f) = \int_c^d P(f|x_0, \dots, x_m)(x) dx = h \sum_{j=0}^m c_j f(x_j) = h \sum_{j=0}^m c_j f(c + \xi_j h)$$

Exaktheit vom Grade m : $\forall Q \in \Pi_m$ gilt $I_m(Q) = \int_c^d Q(x) dx$.

m	Name	ξ_j	c_j	$I_m(f) - \int_c^d f(x) dx$
0	Mittelpunktsregel	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{h^3}{24} f^{(2)}(\xi)$
1	Trapezregel	0, 1	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$	$\frac{h^3}{12} f^{(2)}(\xi)$
2	Simpson-Regel	0, $\frac{1}{2}$, 1	$\frac{1}{6}, \frac{4}{6}, \frac{1}{6}$	$\frac{h^5}{2880} f^{(4)}(\xi)$

Gauß-Quadratur (auf $[c, d]$ mit $h = d - c$)

– $G_m(f) = h \sum_{i=0}^m \omega_i f(x_i)$, Exaktheitsgrad $2m + 1$ – positive Gewichte $\omega_i = \frac{1}{h} \int_c^d l_{im}(x) dx$ – Es ex. $\xi \in [c, d]$, so dass $\left| G_m(f) - \int_c^d f(x) dx \right| = \frac{((m+1)!)^4}{((2m+2)!)^3 (2m+3)} h^{2m+3} |f^{(2m+2)}(\xi)|$

• Gewöhnliche Differentialgleichungen

Euler:

$$\begin{array}{c} \text{(explizit } / \text{ implizit)} \\ y^{j+1} = y^j + h f(t_j, y^j) \quad / \quad y^{j+1} = y^j + h f(t_{j+1}, y^{j+1}) \end{array} \quad (22)$$

Verbesserter Euler:

$$y^{j+1/2} = y^j + \frac{h}{2} f(t_j, y^j) \quad (23)$$

$$y^{j+1} = y^j + h f\left(t_j + \frac{h}{2}, y^{j+1/2}\right) \quad (24)$$

(implizite) Trapezmethode:

$$y^{j+1} = y^j + \frac{h}{2} (f(t_j, y^j) + f(t_{j+1}, y^{j+1})) \quad (25)$$

Lokaler Abbruchfehler:

$$\delta(t_j, y(t_j), h) = y(t_{j+1}; t_j, y(t_j)) - y_h(t_{j+1}; t_j, y(t_j)) = y(t_{j+1}) - y(t_j) - h \Phi_f(t_j, y(t_j), h) \quad (26)$$