Aufgabe 3 (7 Punkte)

Gesucht sind die Lösungen des folgenden nichtlinearen Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{2} + y^2 - 9 &= 0 \\ x\,y + \frac{3}{2}\,x - \frac{7}{2} &= 0 \end{aligned}$$

a) Fertigen Sie eine Skizze an, die die Lage der Lösung(en) im 1. Quadranten verdeutlicht. Bestimmen Sie einen *guten* ganzzahligen Bereich $[x_u, x_o] \times [y_u, y_o]$, in dem eine Lösung liegt.

b) Geben Sie für die in a) fixierte Lösung eine geeignete 2D-Fixpunktgleichung an, und weisen Sie hierfür die Voraussetzungen des Fixpunksatzes von Banach nach. Begründen Sie Ihre Aussagen.

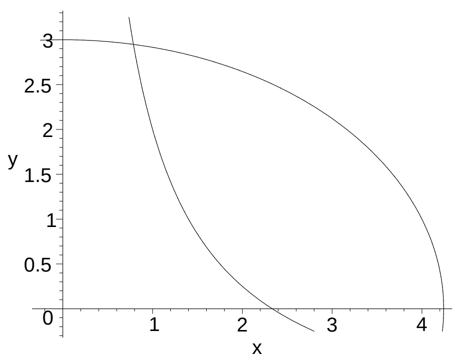
c) Eine weitere Lösung liegt in $[4, 5] \times [-1, 0]$. Für diese ist

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{18 - 2\,y^2} \\ \dfrac{7 - 3\,x}{2\,x} \end{pmatrix}$$

eine geeignete Fixpunktiteration mit Kontraktionszahl (bez. der ∞-Norm) $L = 0.5$. Wieviele Schritte sind ausgehend von dem ganzzahligen Startwert $(x_0, y_0) = (4, -1)$ höchstens erforderlich, um eine Genauigkeit von $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-6}$ zu erzielen.

zu a)

Skizze (Ellipse in Normallage mit Hauptachsen $a = \sqrt{18} \approx 4.34$ und $b = 3$, $y(x) = \dfrac{7 - 3\,x}{2\,x}$ mit Polstelle $x = 0$, Nullstelle $x = \frac{7}{3}$ (Asymptote $y = -\frac{3}{2}$) sowie dem Funktionswert an der Stelle $x = 1$ $(y = 2)$):



Dert Fixpunkt im 1. Quadranten liegt ungefähr bei $(0.7, 3.0)$. Der geforderte *ganzzahlige* Bereich ist also $D = [0, 1] \times [2, 3]$.

zu b)

Wir lösen die erste Gleichung nach y und die zweite Gleichung nach x auf (Auflösung nach y führt gem. Skizze auf eine Steigung < -1):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{7}{2\,y + 3} \\ \sqrt{9 - \frac{x^2}{2}} \end{pmatrix} =: F(x, y) \to F'(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{-14}{(2\,y + 3)^2} \\ \dfrac{-x}{2\sqrt{9 - \frac{x^2}{2}}} & 0 \end{pmatrix}$$

Abb. in sich:

Obige Ableitung zeigt: Die erste Komponente ist als Funktion von y für $y \in \mathrm{I\!R} \backslash \{-3/2\}$ und die zweite als Funktion von x für $x \in [0, \sqrt{18}]$ (streng) monoton fallend. Also: $F(D) = [7/9, 1] \times [\sqrt{17/2}, 3] =$

$[0.\overline{7}, 1] \times [2.915475948, 3] \subset D$

kontraktiv:
D ist konvex und F stetig differenzierbar. Wir könnten die Kontraktivität also durch Abschätzung (einer geeigneten Norm) von F' auf D nachweisen. Da $(1, 3)$ als Startwert gewählt wird und dieser in $F(D)$ liegt, könnten wir für die Kontraktivität bereits eine Einschränkung auf $D' = F(D)$ machen. Dieses Gebiet ist ebenfalls konvex und wir dürfen auch hier die Kontaktivität mit F' zeigen. Für die Norm von F' auf $D\,(D')$ erhalten wir die maximalen Einträge

$$\begin{aligned} \frac{14}{(2\cdot 2+3)^2} &= \frac{14}{49} &= 0.2857142857 \qquad & \left(\frac{14}{(2\sqrt{\frac{17}{2}}+3)^2} = \frac{14}{(\sqrt{34}+3)^2} = 0.1795200653\right) \\ \frac{1}{2\sqrt{9-\frac{1}{2}}} &= \frac{1}{\sqrt{34}} &= 0.1714985852 & \end{aligned}$$

Damit ist F auch kontraktiv auf D mit (z.B.) $\alpha = 0.3$. ($\alpha = 0.18$ für D'.)

zu c)
Jetzt

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{18-2\,y^2} \\ \dfrac{7-3\,x}{2\,x} \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{x}_0 = (x_0, y_0) = (4, -1) \rightarrow \mathbf{x}_1 = (4, -0.625) \rightarrow \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0 = (0, 0.375)$$

$$\varepsilon = 2 \cdot 10^{-6} \rightarrow n \geq \frac{\ln \dfrac{\varepsilon(1-L)}{\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\|_\infty}}{\ln L} = 18.5...$$

Also bringen 19 Schritte mit Sicherheit die geforderte Genauigkeit.