Wir wollen die **Householder-Transformation in einem Tableau** zusammenfassen. Bei der Anwendung wird ja wie folgt *umgeklammert*:

$$\boxed{\begin{aligned} & \left(I - \frac{2}{v^T\, v}\, v\, v^T\right) [A|b] \\ = \quad & [A|b] - \left(\frac{2}{v^T\, v}\, v\right)\, \left(v^T\, [A|b]\right) \\ =: \quad & [A|b] - (\beta\, v)\, \left(v^T\, [A|b]\right) \\ =: \quad & [A|b] - r\, h \end{aligned}}$$

Dabei ist h ein Zeilen- und r ein Spaltenvektor.

Im Tableau:

$$\begin{array}{c|cc} & [A|b] & \\ & & \alpha = \dots \\ \hline v^T & h = v^T\,(A|b) & \beta = \dots \\ \hline r = \beta v & H = r\,h & \\ \hline & [A|b] - H & \\ \hline \end{array} \qquad \text{oder kürzer} \qquad \boxed{\begin{array}{c|c} & [A|b] \\ \hline v^T & h = v^T\,(A|b) \\ \hline r = \beta v & [A|b] - r\,h \\ \hline \end{array}}$$

Beispiel:
Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $A\,x = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} -20 & -18 & -44 \\ 0 & 40 & 45 \\ -15 & 24 & -108 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ -45 \\ 78 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad [A|b]^{(0)} = \left[\begin{array}{ccc|c} -20 & -18 & -44 & 4 \\ 0 & 40 & 45 & -45 \\ -15 & 24 & -108 & 78 \end{array}\right]$$

Löse das Gleichungssystem $A\,x = b$ mittels Householdertransformationen.

Lösung:
Erste Spalte:

$$\begin{array}{rrcll} & \alpha_1 & = & -25 \qquad \left(= -\sqrt{(-20)^2 + 0^2 + (-15)^2}\right) & \text{rechts daneben berechnen} \\ \longrightarrow & v_1 & = & \begin{pmatrix} -45 \\ 0 \\ -15 \end{pmatrix} & \text{transponiert als Zeilenvektor eintragen} \\ \longrightarrow & \beta_1 & = & \dfrac{2}{2250} \qquad \left(= \dfrac{2}{v_1^T\, v_1}\right) & \text{rechts daneben berechnen} \\ \longrightarrow & \beta_1\, v_1 & = & \begin{pmatrix} -1/25 \\ 0 \\ -1/75 \end{pmatrix} & \text{als Spaltenvektor eintragen} \end{array}$$

Bem: Mit α_1 kennen wir auch bereits die erste Spalte von $(A|b)^{(1)}$!

Zweite Spalte (nach Berechnung von $(A|b)^{(1)}$):

$$\alpha_2 = 50 \; \left(= \sqrt{40^2 + 30^2}\right) \; \rightarrow \; v_2 = \begin{pmatrix} 40 + 50 \\ 30 \end{pmatrix} \; \rightarrow \; \beta_2 = \frac{2}{9000} \; \left(= \frac{2}{v_2^T\, v_2}\right) \; \rightarrow \; \beta_2\, v_2 = \begin{pmatrix} 1/50 \\ 1/150 \end{pmatrix}$$

Bem: Mit α_2 kennen wir auch bereits die erste Spalte von $(A|b)^{(2)}$!

$$
\begin{array}{c||ccc|c|c}
 & -20 & -18 & -44 & 4 & \\
[A|b]^{(0)} = & 0 & 40 & 45 & -45 & \\
 & -15 & 24 & -108 & 78 & \alpha_1 = -25 \\
\hline
(-45 \quad 0 \quad -15) & 1125 & 450 & 3600 & -1350 & \beta_1 = 2/2250 \\
\hline
\begin{pmatrix} -1/25 \\ 0 \\ -1/75 \end{pmatrix} & \begin{matrix} -45 \\ 0 \\ -15 \end{matrix} & \begin{matrix} -18 \\ 0 \\ -6 \end{matrix} & \begin{matrix} -144 \\ 0 \\ -48 \end{matrix} & \begin{matrix} 54 \\ 0 \\ 18 \end{matrix} & \text{man beachte die Nullen!} \\
\hline
 & \mathbf{25} & \mathbf{0} & \mathbf{100} & \mathbf{-50} & \\
[A|b]^{(1)} = & 0 & 40 & 45 & -45 & \\
 & 0 & 30 & -60 & 60 & \alpha_2 = 50 \\
\hline
(\quad 90 \quad 30) & & 4500 & 2250 & -2250 & \beta_2 = 2/9000 \\
\hline
\begin{pmatrix} 1/50 \\ 1/150 \end{pmatrix} & & \begin{matrix} 90 \\ 30 \end{matrix} & \begin{matrix} 45 \\ 15 \end{matrix} & \begin{matrix} -45 \\ -15 \end{matrix} & \\
\hline
[A|b]^{(2)} = & & \begin{matrix} \mathbf{-50} \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} \mathbf{0} \\ -75 \end{matrix} & \begin{matrix} \mathbf{0} \\ 75 \end{matrix} & \\
\hline
\end{array}
$$

Bem.: Bei Gleichungssystemen können wir auch die letzte Zeile direkt übernehmen. Bei (echten) Ausgleichsproblemen muss in der letzten Matrixspalte noch eliminiert werden.

Rückwärtseinsetzen:

$$
\begin{pmatrix} 25 & 0 & 100 & | & -50 \\ 0 & -50 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & -75 & | & 75 \end{pmatrix} \uparrow \rightarrow x = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}
$$

Und jetzt die Kurzform:

$$
\boxed{
\begin{array}{c||ccc|c|c}
 & -20 & -18 & -44 & 4 & \\
[A|b]^{(0)} = & 0 & 40 & 45 & -45 & \\
 & -15 & 24 & -108 & 78 & \alpha_1 = -25 \\
\hline
(-45 \quad 0 \quad -15) & & 450 & 3600 & -1350 & \beta_1 = 2/2250 \\
\hline
 & \mathbf{25} & \mathbf{0} & \mathbf{100} & \mathbf{-50} & \\
\begin{pmatrix} -1/25 \\ 0 \\ -1/75 \end{pmatrix} & 0 & 40 & 45 & -45 & \\
 & 0 & 30 & -60 & 60 & \alpha_2 = 50 \\
\hline
(\quad 90 \quad 30) & & & 2250 & -2250 & \beta_2 = 2/9000 \\
\hline
\begin{pmatrix} 1/50 \\ 1/150 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 25 \\ \\ \\ \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ \mathbf{-50} \\ \\ \end{matrix} & \begin{matrix} 100 \\ \mathbf{0} \\ -75 \end{matrix} & \begin{matrix} -50 \\ \mathbf{0} \\ 75 \end{matrix} \uparrow & \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\
\hline
\end{array}
}
$$

Nach der letzten Elimination wird die Matrix $[R|b]$ mit den Ergebnissen der vorherigen Eliminationen *aufgefüllt* und das Rückwärtseinsetzen durchgeführt.

Bemerkungen:

- Es ist sehr sinnvoll, v (zumindest annähernd) zu normieren. Praktisch empfiehlt es sich, die Transformation mit ($\tilde{v} := \sqrt{\beta}\, v$)
$$I - \beta\, v\, v^T = I - \tilde{v}\, \tilde{v}^T$$
zu rechnen.
- β wird in der Praxis folgendermaßen berechnet (es ist ja $|\alpha| = \|y\|_2$):
$$\beta = \frac{1}{|\alpha|\ (|\alpha| + |y_1|)}$$