

Numerische Mathematik I für Ingenieure SS15

Verständnisfragen – Übung 5

VF-1: Es seien $\|\cdot\|$ eine Vektornorm auf \mathbb{R}^n und $\|\cdot\|$ die zugehörige Matrix-Norm. Weiter seien $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!

| | | |
|----|--|--|
| 1. | $\ A^k\ \leq \ A\ ^k$ | |
| 2. | Es sei A zusätzlich invertierbar. Dann gilt $\ A^{-1}\ \geq \frac{1}{\ A\ }$ | |
| 3. | Es sei A zusätzlich invertierbar. Dann gilt $\ A^{-1}\ = \frac{1}{\inf_{\ x\ =1} \ Ax\ }$ | |
| 4. | $\forall x \in \mathbb{R}^n : \ Ax\ = \ A\ \ x\ $ | |
| 5. | $\ AB\ \leq \ A\ \cdot \ B\ $ | |

VF-2: Es seien $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine allgemeine, reguläre Matrix und $x, b \in \mathbb{R}^n$ mit $Ax = b$. Weiter seien $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine reguläre obere Dreiecksmatrix, $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine normierte untere Dreiecksmatrix und $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische, positiv-definite Matrix. (Bei den Angaben zur Zahl der benötigten Operationen (kurz “Ops”) verwenden wir die Zählung wie in der Vorlesung bzw. im Buch). Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!

| | | |
|----|--|--|
| 1. | Die Lösung von $Rx = b$ benötigt $\frac{n^3}{3} + \mathcal{O}(n^2)$ Ops. | |
| 2. | Die Lösung von $Lx = b$ benötigt $\frac{n^2}{2} + \mathcal{O}(n)$ Ops. | |
| 3. | Die Lösung von $Ax = b$ per Gaußelimination benötigt $\frac{n^3}{3} + \mathcal{O}(n^2)$ Ops. | |
| 4. | Die Lösung von $Sx = b$ per Choleskyzerlegung benötigt $\frac{n^3}{6} + \mathcal{O}(n^2)$ Ops. | |

VF-3: Es seien $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ orthogonale (quadratische) Matrizen, d.h. $A^T A = I$ und $B^T B = I$, wobei I die Einheitsmatrix ist. Weiter bezeichne $\|\cdot\|_2$ die Euklidische Vektor- / Matrixnorm und κ_2 die zugehörige Konditionszahl. Welche der folgenden Aussagen sind immer korrekt?

| | | |
|-----|---|--|
| 1. | A^T ist orthogonal | |
| 2. | $A A^T = I$ | |
| 3. | A ist nicht symmetrisch | |
| 4. | A ist symmetrisch | |
| 5. | AB ist eine orthogonale Matrix | |
| 6. | $A + B$ ist eine orthogonale Matrix | |
| 7. | Die Spalten von A sind paarweise orthogonal | |
| 8. | Die Zeilen von A sind paarweise orthogonal | |
| 9. | Alle Zeilen und Spalten von A haben die Euklidische Länge 1 | |
| 10. | $\ Ax\ _2 = \ x\ _2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ | |
| 11. | $\kappa_2(A) = 1$ | |