

# Numerische Mathematik I für Ingenieure SS15

## Verständnisfragen – Hausübung 7

**VF-1:** Sei  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  mit  $m \geq n$ . Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!

1.	Der Aufwand zur Berechnung von $A^T A$ ist proportional zu $m^2 n$ .	falsch
2.	Der Aufwand zur Berechnung von $A^T A$ ist proportional zu $n^2 m$ .	wahr
3.	Der Aufwand zur Berechnung von $A^T A$ ist stets größer als der zum Lösen der Normalgleichungen.	wahr
4.	Zur Lösung der Normalgleichungen verwendet man das Cholesky-Verfahren, weil das Vorwärts-/Rückwärtseinsetzen bei der $LDL^T$ -Zerlegung ungefähr halb so viele Operationen benötigt wie das bei einer $LR$ -Zerlegung.	falsch

**VF-2:** Mit  $m > n$  und  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$  soll das lineare Ausgleichsproblem  $\|Ax - b\|_2 \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n}$  gelöst werden. Hierbei habe die Matrix  $A$  den Rang  $n$ , die Cholesky-Zerlegung  $A^T A = LDL^T$  und die Lösung des Problems wird mit  $x^*$  bezeichnet. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!

1.	Es gilt $L^T x^* = D^{-1} y$ , wobei $y$ die Lösung der Gleichung $Ly = b$ ist.	falsch
2.	Die Normalgleichungen lassen sich immer mit Gauß-Elimination ohne Pivotisierung lösen.	wahr
3.	Wenn die Spalten von $A$ orthonormal sind, dann ist $x^*$ auch die Lösung von $\ x - A^T b\ _2 \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n}$ .	wahr
4.	Es gilt stets $\ LDL^T x^* - A^T b\ _2 = 0$ .	wahr

**VF-3:** Mit  $m > n$  und  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$  soll das lineare Ausgleichsproblem  $\|Ax - b\|_2 \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n}$  gelöst werden. Hierbei habe die Matrix  $A$  den Rang  $n$ , und die Lösung des Problems wird mit  $x^*$  bezeichnet. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!

1.	Wegen $\kappa_2(A^T A) = \kappa_2(A)^2$ sind die Normalgleichungen für die numerische Lösung des Ausgleichsproblems immer ungeeignet.	falsch
2.	Die Normalgleichungen lassen sich mit dem Cholesky-Verfahren lösen, nicht aber mit Gauß-Elimination mit Pivotisierung.	falsch
3.	Mit der Cholesky-Zerlegung $A^T A = LDL^T$ gilt stets $L^T x^* = D^{-1} y$ , wobei $y$ die Lösung der Gleichung $Ly = A^T b$ ist.	wahr
4.	Es gilt stets $\ Ax^* - b\ _2 = \ LDL^T x^* - A^T b\ _2$ .	falsch

**VF-4:** Mit mit  $m > n$  und  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$  soll das lineare Ausgleichsproblem  $\|Ax - b\|_2 \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n}$  gelöst werden. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!

1.	Die Normalgleichungen tragen ihren Namen, weil das damit berechnete Residuum senkrecht auf $b$ steht.	falsch
2.	Wegen $\kappa_2(A^T A) = \kappa_2(A)^2$ sind die Normalgleichungen für die numerische Lösung großer Gleichungssysteme besonders geeignet.	falsch
3.	Im Gegensatz zu Givens-Rotationen lässt sich mit Householder-Spiegelungen das Residuum $\ Ax - b\ _2$ nicht direkt aus dem transformierten System ablesen, sondern man muss erst $Ax - b$ explizit ausrechnen.	falsch
4.	Bei der Verwendung einer $QR$ -Transformation (Givens/Householder) muss die Matrix $Q$ nicht explizit aufgestellt werden, um die Lösung $x$ zu erhalten.	wahr