

Numerische Mathematik I für Ingenieure SS15

Verständnisfragen – Übung 11

VF-1: Es seien $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $m > n$ und $x^* \in \mathbb{R}^n$ eine Lösung des zugehörigen nichtlinearen Ausgleichsproblems $\|F(x)\|_2 \rightarrow \min$ sowie $\phi(x) := \frac{1}{2}F(x)^T F(x)$. Dann gilt: (Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!)

1.	$\phi(x^*) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \phi(x)$.	
2.	Die Gauß-Newton-Methode zur Lösung des nichtlinearen Ausgleichsproblems kann als Fixpunktiteration geschrieben werden mit der Iterationsfunktion $\Phi(x) := x - (F'(x)^T F'(x))^{-1} \nabla \phi(x)$.	
3.	Falls die Gauß-Newton-Methode konvergiert, dann konvergiert sie lokal quadratisch.	
4.	Lokale Maxima und Sattelpunkte sind für die Gauß-Newton-Methode abstoßend.	

VF-2: Wir betrachten das (nichtlineare) Ausgleichsproblem: Bestimme $x^* \in \mathbb{R}^n$ so, dass $\|F(x^*)\|_2 = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|F(x)\|_2$. Dazu sei noch $\phi(x) = 1/2 \cdot F(x)^T F(x)$. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!

1.	Das Gauß-Newton-Verfahren ist eine Fixpunktiteration.	
2.	Mit genügend guten Startwerten kann man mit dem Gauß-Newton-Verfahren auch lokale Maxima von ϕ bestimmen.	
3.	Mit genügend guten Startwerten kann man mit dem Gauß-Newton-Verfahren immer die lokalen Minima von ϕ bestimmen.	
4.	Wenn $\ F(x^*)\ _2 = 0$ ist, so hat das Gauß-Newton-Verfahren eine Konvergenzordnung $p > 1$.	

VF-3: Es sei $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $m > n$. Wir betrachten das (nichtlineare) Ausgleichsproblem $\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|F(x)\|_2$. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!

1.	Das Gauß-Newton-Verfahren ist lokal quadratisch konvergent.	
2.	Das Levenberg-Marquardt-Verfahren ist lokal quadratisch konvergent.	
3.	Beim Levenberg-Marquardt-Verfahren hat das linearisierte Ausgleichsproblem in jedem Iterationsschritt stets eine eindeutige Lösung.	
4.	Beim Gauß-Newton-Verfahren hat das linearisierte Ausgleichsproblem in jedem Iterationsschritt stets eine eindeutige Lösung.	
5.	Sei nun $F(x, y) = \begin{pmatrix} (x-1)^2 \\ 2x-3 \\ 3y-2 \end{pmatrix}$. Wir betrachten $\ F(x, y)\ _2 \rightarrow \min$. Bestimme für $(x_0, y_0) = (0, 0)$ (x_1, y_1) mit dem Gauß-Newton-Verfahren und gib x_1 an.	

VF-4: $\Pi_n = \left\{ \sum_{j=0}^n a_j x^j \mid a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R} \right\}$ der Raum der Polynome vom Grade (höchstens) n . Ferner sei $P(f \mid x_0, \dots, x_n)$ das Lagrange-Interpolationspolynom zu den Daten $(x_0, f(x_0)), \dots, (x_n, f(x_n))$.

1.	Die Lagrange-Fundamentalpolynome $l_{jn}(x) = \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\dots(x-x_n)}{(x_j-x_0)\dots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\dots(x_j-x_n)}$, $0 \leq j \leq n$ bilden eine Basis von Π_n .	
2.	Die Lagrange-Fundamentalpolynome zur Darstellung von $P(f \mid x_0, \dots, x_n)$ sind gerade so konstruiert, dass gilt: $l_{jn}(x_i) = \delta_{ji}$, $i, j = 0, \dots, n$.	
3.	$\{a_0, a_1 x, a_2 x^2, \dots, a_n x^n\}$ bildet für beliebige, nicht verschwindende Koeffizienten $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ eine Basis von Π_n .	
4.	Für ein festes \bar{x} ist der Aufwand für die Auswertung von $P(f \mid x_0, \dots, x_n)(\bar{x})$ in der Lagrange-Darstellung von der Ordnung $\mathcal{O}(n)$.	