Numerische Mathematik I für Ingenieure SS15
Verständnisfragen – Hausübung 12

VF-1: Sei $P(f|x_0,\ldots,x_n)$ das Lagrange-Interpolationspolynom zu den Daten $f(x_i)$, $i=0,\ldots,n$ mit den Stützstellen $a=x_0<\ldots<x_n=b$ für $n\in\mathbb{N}$. Sei $e(x):=f(x)-P(f|x_0,\ldots,x_n)$, $x\in\mathbb{R}$ der Fehler im Intervall $I:=[\min(a,x),\max(b,x)]$. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!

1.	$e(x_i)=0,\ i=0,\ldots,n$.	
2.	Für $f\in C^{n+1}(I)$ existiert ein $\xi\in I$, so dass $e(x)=\prod_{i=0}^n(x-x_i)\,\frac{1}{(n+1)!}\,f^{(n+1)}(\xi)$.	
3.	Es sei $[c,d]\subsetneq I$. Der Interpolationsfehler lässt sich dann für alle $x\in[c,d]$ wie folgt abschätzen: $\lvert e(x)\rvert\le\max_{z\in[c,d]}\lvert\prod_{i=0}^n(z-x_i)\rvert\,\max_{z\in[c,d]}\frac{\lvert f^{(n+1)}(z)\rvert}{(n+1)!}$.	
4.	Sei $f(x)=1/(1+x^2)$, $x\in[-5,5]$. Für festes $n\in\mathbb{N}$ seien die Stützstellen $x_{j,n}=-5+10\,j/n$, $j=0,\ldots,n$ gegeben. Dann gilt für den Fehler: $\lim_{n\to\infty}\max_{x\in[-5,5]}\lvert f(x)-P(f\lvert x_0,\ldots,x_n)\rvert=0$.	
5.	Es seien $f(0)=2,\ f(2)=4$ und $f(3)=5$. Berechne $P(f\lvert 0,2,3)(1.5)$.	

VF-2: Es sei $P(f\mid x_0,\ldots,x_n)$ das Interpolationspolynom zu den Daten $(x_0,f(x_0)),\ldots,(x_n,f(x_n))$ mit $x_0<\ldots<x_n$, und $x,x^*\in[x_0,x_n]$. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!

1.	$P(f\mid x_0,\ldots,x_n)$ kann man an der Stelle x^* effizient mit dem Neville-Aitken-Schema auswerten.	
2.	$P(f\mid x_0,\ldots,x_n)$ kann man effizient mit dem Neville-Aitken-Schema bestimmen.	
3.	$P(f\mid x_0,\ldots,x_n)$ lässt sich sowohl mit dem Newton-Schema als auch mittels der Lagrange-Fundamentalpolynome aufstellen.	
4.	Sowohl die Newton-Interpolation als auch das Neville-Aitken-Schema haben zur Auswertung von $P(f\mid x_0,\ldots,x_n)(x)$ einen Aufwand von $\mathcal{O}\left(n^2\right)$	
5.	Es seien $f(x)=\ln(x)+2\,x^2$ und $x_0=0.5,\ x_1=1$ sowie $x_2=2$. Bestimme $P(f\lvert x_0,\,x_1,\,x_2)(1)$.	

VF-3: Es seien $n\in\mathbb{N}$ und $P(f|x_0,\ldots,x_n)$ das Lagrange-Interpolationspolynom vom Grad n, das die Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ in den Stützstellen $a\le x_0<\ldots<x_n\le b$ interpoliert.
Es seien δ_n der führende Koeffizient dieses Polynoms und $[x_0,\ldots,x_n]\,f$ die dividierte Differenz der Ordnung n von f.

1.	Es gilt: $P(f\,\lvert\,x_0,\ldots,x_n)(x)=P(f\,\lvert\,x_0,\ldots,x_{n-1})(x)+\delta_n\Pi_{i=0}^{n-1}(x-x_i)$ für alle $x\in\mathbb{R}$.	
2.	Der Fehler $\max_{x\in[a,b]}\lvert P(f\,\lvert\,x_0,\ldots,x_n)(x)-f(x)\rvert$ ist minimal wenn man die Stützstellen x_i äquidistant wählt.	
3.	Es sei f ein Polynom vom Grad maximal n. Dann gilt: $f(x)=P(f\,\lvert\,x_0,\ldots,x_n)(x)$ für alle $x\in\mathbb{R}$.	
4.	Es gilt: $\delta_n=[x_n,\ldots,x_0]f$.	
5.	Es sei $f(x)=x^3+2\,x^7$. Gib das kleinste n an, für das $[x_n,\ldots,x_0]f=0$ gilt.	